ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-NEUVIÈME, 1955

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

SECOND FASCICULE

22 DÉCEMBRE 1955

TABLE DES MATIÈRES

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1955

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 75 frs

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant due référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

TABLE DE MATIÈRES

PAGES

Session du 27 octobre, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Le théorème de Picard du point de vue topologique, par Ch. de LA VALLÉE POUSSIN 37

A. S. Eddington E-numbers, by A. DEPRIT 50

A note on a theorem of F. C. Hsiang, by S. D. SINVHAL 79

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Modèle atmosphérique, par O. GODART 85

Réponse des scintillateurs inorganiques activés à l'énergie des radiations incidentes, par A. MEESSEN 102

Remarques concernant la purification des deutéroéthanes, par R. VAN RIET. 117

Tables of integrals $A_n(\alpha) = \int_1^\infty \lambda^n e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda$ and $F_n(\alpha) = \int_1^\infty Q_0(\lambda)\lambda^n e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda$ by A. RAHMAN 123

Table des matières du tome 69me 129

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg 100 fr.
dans les autres pays 150 fr.

SESSION DU 27 OCTOBRE 1955
A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Le théorème de Picard du point de vue topologique

PAR

C. de La VALLÉE POUSSIN

§ 1. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

1. — Objet du présent article. — Soit

$$u = f(z)$$

une fonction analytique uniforme de z dans le plan (z). On suppose que cette fonction, holomorphe ou méromorphe, possède un point singulier essentiel à l'infini. Dans ce cas, selon le théorème d'indétermination de Weierstrass, la fonction admet toute valeur comme valeur limite à l'infini. Une valeur u_0 que la fonction ne prend pas sur le plan, est une *valeur exceptionnelle* et le point u_0 est un *point exceptionnel*. Le théorème de Picard affirme qu'une fonction holomorphe ne peut admettre qu'une seule valeur exceptionnelle finie, et qu'une fonction méromorphe ne peut en admettre que deux. Le second résultat se ramène au premier par une inversion qui rejette à l'infini l'une des valeurs exceptionnelles. On considère, d'après cela, la valeur ∞ comme la seconde valeur exceptionnelle d'une fonction holomorphe.

La relation $u = f(z)$ établit une correspondance entre les représentations géométriques des variables z et u sur leurs plans respectifs. Nous nous proposons de montrer que les propriétés topologiques de

cette correspondance fournissent, sans l'intervention de fonction étrangère, ni transformation de quelque nature qu'elle soit, une démonstration intuitive et directe du théorème de Picard. Les points exceptionnels permettent de partager le plan (z) en morceaux par des lignes dont les correspondantes ne morcellent pas le plan (u), ce qui implique contradiction s'il y a plus de deux points. Tel est le ressort de la démonstration et la raison profonde du théorème de Picard.

Cette étude topologique suggère une généralisation de la définition de valeur exceptionnelle qui étend celle-ci aux fonctions qui prennent une infinité de fois toutes leurs valeurs (§ 6). Le théorème de Picard se généralise en même temps. Comme auparavant, une fonction n'admet au plus que deux valeurs exceptionnelles. L'existence de ces valeurs entraîne, pour la fonction qui les admet, les mêmes conditions de structure et de périodicité que dans les cas antérieurs.

2. — Notions préliminaires. — *a*) L'ensemble des zéros de la dérivée d'une fonction analytique uniforme $u = f(z)$ est fini ou dénombrable. Nous dirons que les points racines de $f'(z)$ sont les *points anormaux* du plan (z). Leurs correspondants dans le plan (u) sont les points anormaux de ce plan, et leur ensemble aussi est dénombrable. Les lignes des plans (z) et (u) ne passant par aucun point anormal, en sont les *lignes normales*. Si une ligne n'est pas normale, il suffit d'une déformation aussi petite qu'on veut pour la rendre normale. *Toutes les lignes considérées dans cette Note seront supposées normales ou rendues telles.*

b) Si, à partir d'une valeur particulière u_0 de u, on mène une ligne normale, la ligne correspondante du plan (z) se décrit, de proche en proche, sans ambiguïté, à partir d'un point z_0 correspondant à u_0. En effet, seul un point anormal provoque l'ambiguïté.

c) En général, la fonction $u = f(z)$ n'est pas étalée, c'est-à-dire que le domaine (u) s'étend sur un ensemble de feuillets superposés. Il convient de distinguer le *domaine* (u) (qui sépare les feuillets) du *plan* (u) (qui ne les sépare pas). Les points exceptionnels sont définis sur le plan (u).

3. — Ensemble E des points exceptionnels du plan (u). Son complémentaire CE. — *L'ensemble* E *est fermé. Son complémentaire* CE *est ouvert et connexe.* E *est la frontière de* CE.

Tout point de CE est intérieur, car son voisinage correspond à celui d'un point z correspondant. Donc CE est *ouvert*, et partant

E *fermé*. Le complémentaire CE est *connexe*. En effet, deux, u_0 et u_1, de ses points sont liés, dans CE, par une ligne correspondant à une ligne du plan (z) reliant deux points z_0 et z_1, qui correspondent à u_0 et u_1.

Tous les points de E sont des points frontières de CE, car u doit pouvoir les atteindre à la limite en se déplaçant dans CE, c'est-à-dire quand z varie dans son plan (Théorème de Weierstrass).

4. — Le point ∞ . — Le *point* ∞ comprend tous les points à l'infini dans le plan, ceux-ci sont considérés comme ne formant qu'un seul point. Cette interprétation se concrétise dans la représentation sphérique du plan. Si un ensemble E, fermé sur le plan fini, n'est pas borné, il se ferme sur le plan complet par l'adjonction du point ∞ . Si l'ensemble fermé E se compose de plusieurs branches infinies séparées sur le plan fini, elles ont en commun le point ∞ et sont réunies sur le plan complet. Un ensemble fermé peut se réduire à un seul point, et (comme cas particulier) au point ∞ .

5. — Propriété caractéristique d'un point exceptionnel. — *Si la valeur* α *est exceptionnelle, on peut mener dans le plan* (z) *une ligne qui s'écarte à l'infini et sur laquelle la fonction* $f(z)$ *admet la valeur* α *comme limite unique à l'infini.*

Traçons dans le plan (u) une ligne l aboutissant à un point exceptionnel α, et soit L la ligne correspondante du plan (z). Cette ligne L, sur laquelle $f(z)$ tend vers α, s'écarte à l'infini, car toute valeur de $f(z)$ sur le plan diffère de α. Donc la ligne L est une ligne illimitée sur laquelle $f(z)$ converge vers α. Comme on le verra plus loin (§ 6), on peut prendre cette propriété comme définitive générale d'un point exceptionnel.

6. — Théorème fondamental. — *Si un système de lignes simples partage le plan* (z) *en morceaux connexes, tandis que les lignes correspondantes ne morcellent pas* CE, *chaque morceau isolé du plan* (z) *représente* CE *tout entier, c'est-à-dire que tout point de* CE *a un représentant dans ce morceau. La fonction* $f(z)$ *prend dans ce morceau toutes les valeurs dont elle est susceptible.*

Soit A un morceau particulier du plan (z), et z_0 un point de ce morceau. Soit u_0 le correspondant de z_0, et u un autre point quelconque de CE. On peut, par hypothèse, joindre u_0 à u par une ligne simple λ de CE sans couper les lignes correspondant aux frontières

de A. La ligne l issue du point z_0 qui correspond à λ aboutit au point z qui représente u. Cette ligne l ne rencontre pas la frontière de A, car cette rencontre entraînerait celle de u avec l'image de cette frontière, ce qui est exclu par hypothèse.

Remarque. — Si l'ensemble E ne comprend que deux points, le théorème précédent s'applique à la correspondance des plans (z) et (u). Il s'applique aussi à la correspondance d'un plan avec un domaine connexe.

§ 2. — THÉORÈME DE PICARD

7. — THÉORÈME. — *Si l'ensemble* E *peut se partager en deux ensembles fermés, chacun d'eux se réduit à un point.*

Soient E_1 et E_2 les deux ensembles fermés dans lesquels se partage E. L'un d'eux, soit E_1, est borné, car ils ne sont pas réunis par le point ∞ (n° 4). Soit $\alpha\beta$ un segment de ligne simple joignant, dans CE, un point α de E_1 à un point β de E_2, et soit m un point de ce segment. Si β n'est pas le seul point de E_2, joignons, dans CE, m à un second point γ de E_2 sans couper $\alpha\beta$. Désignons par a, b, c, respectivement les segments $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$. Les lignes $a + b$ et $a + c$ forment coupure entre E_1 et E_2, mais sans partager CE, car l'une comme l'autre se tourne sur un circuit autour de E_1. Soit M le point correspondant à m, et A, B les lignes correspondant à a et b sur le plan (z). Ces deux lignes sont simples et s'écartent à l'infini sans se couper. Elles partagent le plan (z) en secteurs séparés. Soit S celui qui est compris entre A et B. Ce secteur S représente CE tout entier, car la ligne $a + b$ qui correspond à sa frontière ne partage pas CE (n° 6). Donc, dans le secteur S, nous pouvons mener la ligne simple et infinie C qui correspond à c. Celle-ci partage S en deux secteurs, dont l'un entre A et C représente encore CE tout entier, car la coupure $a + c$ ne partage pas CE. Poursuivant indéfiniment ce processus de partage, nous menons entre A et C la ligne B_1 qui correspond à b, entre A et B_1 celle C_1 qui correspond à c, et ainsi de suite indéfiniment.

Nous déterminons ainsi une suite illimitée de lignes B, C, B_1, C_1, ... B_n, C_n, ..., représentant alternativement b et c. Ces lignes sont illimitées, ne se coupent pas, et progressent indéfiniment vers A sans l'atteindre. Elles admettent donc une ligne limite. Celle-ci, limite commune de lignes représentant alternativement b et c, serait une ligne de discontinuité de $f(z)$. Donc E_2 ne peut contenir deux points.

Mais E_1 se réduit aussi à un point, car γ peut se prendre aussi bien sur E_1 que sur E_2.

Si la fonction $f(z)$ est méromorphe, E_2 est borné. La fonction admet deux valeurs exceptionnelles finies auxquelles se réduisent respectivement E_1 et E_2.

Si la fonction est holomorphe, E_2 n'est pas borné. La fonction admet la valeur exceptionnelle finie à laquelle se réduit E_1 et celle infinie à laquelle se réduit E_2 (n° 4).

8. — Théorème. — *Si* E *ne peut se scinder en deux ensembles fermés (un point étant considéré comme un ensemble fermé) la fonction* $f(z)$ *n'admet pas de point singulier essentiel à l'infini.*

Supposons d'abord $f(z)$ holomorphe. E contient le point ∞ et n'est pas borné. Si l'on ne peut pas en détacher un point ou un ensemble autour duquel le point u puisse tourner, le domaine CE est simplement connexe, et E est sa frontière extérieure.

Soit γ un contour *simple* dans CE serrant d'infiniment près sa frontière E. Tous les points du contour correspondant Γ dans le plan (z) tendent vers l'infini. Le contour Γ est fermé. En effet, dans le cas contraire, il ferait correspondre un domaine infini à l'intérieur de γ qui, ainsi que sa frontière, exclut les points exceptionnels et, en particulier, le point ∞ . Quand γ converge vers E, Γ s'élargit à ∞ . Donc $f(z)$ converge vers E à l'infini et n'admet comme valeur limite aucun point de CE. Ce résultat est en contradiction avec le théorème d'indétermination de Weierstrass.

Si $f(z)$ est méromorphe, le cas se ramène au précédent par une inversion qui rejette à l'infini un point de CE, dont le correspondant devient un pôle. L'ensemble transformé CE s'étend à l'infini, et E devient sa frontière intérieure. Quand z tend vers l'infini, $f(z)$ tend vers E qui est borné. Le point ∞ n'est pas un point singulier de $f(z)$.

9. — Théorème de Picard. — *Une fonction analytique uniforme admet au plus deux valeurs exceptionnelles. Celles-ci sont finies toutes les deux si la fonction est méromorphe; l'une est finie, l'autre infinie si elle est holomorphe.*

Ce théorème est la conclusion immédiate des deux précédents.

§ 3. — CARACTÈRES DE STRUCTURE. FONCTIONS HOLOMORPHES

10. — Théorème. — *Soit* $u = f(z)$ *une fonction holomorphe ad-*

mettant la valeur exceptionnelle finie α. *Soit* γ *un contour simple et normal* (n° 3) *enfermant ce point. La ligne* Γ *qui lui correspond dans le plan* (z) *est une ligne simple et ouverte qui s'écarte à l'infini dans les deux sens. Le point* z *décrit cette ligne tandis que son correspondant* u *tourne indéfiniment autour de* γ.

La ligne Γ ne peut se fermer, car, si elle se fermait, elle devrait contenir un représentant du point α, et il n'y en a pas. Elle est infinie dans les deux sens. En effet, marquons sur Γ les points $z_0, z_1, \ldots z_n, \ldots$, qui correspondent à u_0 aux passages consécutifs de u par ce point. Si une branche de Γ restait confinée dans un domaine borné, les points z_n (en nombre infini) y admettraient un point-limite. Celui-ci serait une racine non isolée de l'équation $f(z) = u_0$, ce qui est exclu.

11. — Partage du plan (z) en tranches. Caractère périodique de la fonction. — Considérons encore les lignes correspondantes γ et Γ de la démonstration précédente. A partir du point α menons une demi-droite δ illimitée et normale (n° 2). Soit u_0 son point d'intersection avec γ. Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ les points successifs de Γ qui correspondent aux passages consécutifs de u par u_0. Par ces divers points menons respectivement les lignes $\Delta_0, \Delta_1, \ldots \Delta_n, \ldots$ qui correspondent à δ. Ces lignes sont simples, infinies dans les deux sens et ne se rencontrent pas. Elles partagent le plan (z) en tranches séparées. La ligne δ qui correspond à leurs frontières ne partage pas le plan (u). Donc chaque tranche représente le plan (u) tout entier. Dans chacune d'elles, la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs dont elle est susceptible. Tel est le *mode particulier de périodicité* de $f(z)$. Cette périodicité met en évidence le théorème suivant.

Toute valeur finie autre que l'exceptionnelle, est prise une infinité de fois.

La tranche est divisée en deux parties par l'arc de Γ qui la traverse. Quand z tend vers l'infini, $f(z)$ tend vers α dans l'une, et vers ∞ dans l'autre. En effet, l'une correspond à l'intérieur de γ, et l'autre au reste du plan (u).

12. — Possibilité de systèmes différents de tranches. — Si l'on remplace la ligne δ par une autre, on modifie la position des lignes Δ. Mais, au point de vue de la structure de la fonction, les deux systèmes de tranches sont complètement équivalents.

La chose est différente si γ admet deux représentations différentes, Γ et Γ', sur le plan (z). Chacune détermine un système de

tranches qui lui est propre. Ces tranches ne peuvent se superposer, auquel cas $f(z)$ ne serait plus uniforme. Donc, à chaque détermination particulière de Γ correspond un système distinct de tranches recouvrant une région du plan (z) qui lui appartient. Il est clair que le raccord de ces divers systèmes ne peut se faire que sur des singularités de la fonction. Ce comportement de la fonction peut être étudié sur l'exemple très simple qu'en donne la fonction e^{z^2}, qui donne l'existence à deux lignes Γ.

§ 4. — CARACTÈRES DE STRUCTURE FONCTIONS MÉROMORPHES

13. — Théorème. — *Soit $u = f(z)$ une fonction méromorphe admettant les deux valeurs exceptionnelles finies α et α'. Si on les enferme respectivement dans des contours simples et normaux γ et γ' s'excluant l'un l'autre, les lignes Γ et Γ' du plan (z) qui correspondent à γ et à γ', sont des lignes ouvertes qui ne se rencontrent pas et s'écartent à l'infini dans les deux sens.*

Les lignes Γ et Γ' sont ouvertes et illimitées. La démonstration suivante s'applique à chacune d'elles. Si la ligne Γ se fermait, son intérieur correspondrait à l'extérieur ou à l'intérieur de γ selon que γ enferme ou non un pôle. Dans le premier cas, Γ devrait contenir un représentant de α' et, dans le second, un représentant de α, ce qui est exclu par hypothèse.

14. — Partage du plan (z) en tranches. — Menons, dans le plan (u), une ligne simple δ joignant α à α' et coupant respectivement γ et γ' aux deux seuls points u_o et u'_o. Quand z décrit Γ, le point u tourne indéfiniment autour de γ. De même, u tourne autour de γ' quand z décrit Γ'. Marquons sur Γ les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ correspondant aux passages consécutifs de u par le point u_o, et sur Γ', les points $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$ correspondant aux passages de u par u'_o. Les lignes Δ qui correspondent à δ se déterminent, soit à partir des points z_i, soit à partir des points z'_i, mais leur détermination est la même. En effet, les lignes Δ ne se coupent pas entre elles, mais coupent Γ et Γ'. Une double détermination ferait correspondre, sur Γ et sur Γ' respectivement, des arcs différents à un même tour de u sur γ ou sur γ'. Les lignes consécutives $\Delta_o, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$ correspondant à δ sont infinies dans les deux sens et coupent les lignes Γ et Γ' aux points z_i et z'_i du même indice.

Les lignes Δ_n partagent le plan (z) en *tranches* consécutives qui se succèdent à l'infini dans les deux sens. Les frontières d'une tranche correspondent à la ligne δ. Celle-ci ne partage pas le plan (u), donc chaque tranche représente le plan (u) tout entier, et la fonction prend dans chacune toutes les valeurs dont elle est susceptible. Tel est le *genre de périodicité* de la fonction $f(z)$.

16. — Partage des tranches. — Les lignes Γ et Γ' traversent toutes les tranches et les divisent en trois parties : deux *bouts* et une *partie médiane*. L'un des bouts représente l'intérieur de γ, l'autre celui de γ', la partie médiane représente le reste du plan (u). Quand z tend vers l'infini, $f(z)$ tend vers α dans le premier bout, et vers α' dans le second. Quand z traverse toutes les tranches sans tendre vers un bout, $f(z)$ ne converge pas. Comme z est borné dans la partie médiane, celle-ci renferme un pôle au moins, sinon $f(z)$ bornée dans tout le plan se réduirait à une constante.

Cette suite illimitée de tranches, dont les trois parties correspondent respectivement à α, α' et au pôle, apparaît comme une mise en image du théorème de Picard.

§ 5. — PREMIÈRE EXTENSION DU THÉORÈME DE PICARD

17. — Valeur exceptionnelle (sens élargi). — L'extension du théorème de Picard aux fonctions qui n'admettent certaines valeurs qu'un nombre limité de fois est classique. L'exposé suivant est fait du point de vue topologique.

Dans cet exposé, nous donnerons encore le nom de *valeur exceptionnelle* à une valeur que la fonction $u = f(z)$ ne prend qu'un nombre limité de fois.

18. — Propriété caractéristique. — Selon le théorème de Picard (n° 9), il y a deux valeurs au plus de u que $f(z)$ ne prend pas. Nous évitons de faire passer u par celles-là.

Si α est une valeur exceptionnelle (sens élargi), on peut mener dans le plan (z) une ligne illimitée L *sur laquelle la fonction admet α comme limite unique à l'infini.*

Soit α une valeur que la fonction $f(z)$ ne prend qu'en r points $a_1, a_2, \ldots a_r$. Enfermons tous ces points à l'intérieur d'un contour simple et fermé Λ. La ligne λ du plan (u) qui lui correspond est bornée. Joignons le point α à un point de λ, sans couper λ, par une ligne

simple l. Soit L la ligne simple qui correspond à l. Quand z décrit L, $f(z)$ tend vers α. Mais L est extérieur au contour Λ et ne peut rencontrer de point a_i. Donc L se prolonge à l'infini, et $f(z)$ admet α comme seule limite à l'infini sur L.

19. — Théorème étendu de Picard. — *Une fonction analytique uniforme admet au plus, au sens élargi, deux valeurs exceptionnelles.*

C'est la conséquence de la propriété précédente.

D'un point M du plan (z) menons trois lignes simples A, B, C s'écartant à l'infini, évitant tout point correspondant à une valeur exceptionnelle; et telles que $f(z)$ admette respectivement les limites α, β et γ à l'infini sur ces lignes. Soit m le point correspondant à M dans le plan (u). Les lignes a, b, c correspondant à A, B, C sont issues de ce point et aboutissent respectivement aux points α, β et γ. Les lignes a, b, c, même réunies, ne cloisonnent pas le domaine (u), car elles peuvent être suivies sur leurs deux bords, qui correspondent à ceux de A, B, C, et on les tourne autour des points α, β et γ. Les lignes A, B, C limitent trois secteurs isolés du plan (z). Chacun resprésente le plan (u) tout entier, car leurs frontières correspondent à a, b, ou c.

On se retrouve exactement dans les conditions de la démonstration du n° 7, et le même processus illimité de partage des tranches conduit à la même contradiction.

20. — Caractères de structure. — Les caractères de structure sont les mêmes que dans le cas précédent (§ 4). Les lignes Δ, Γ et Γ' se définissent de la même façon. Les lignes Δ partagent le plan (z) en tranches correspondant chacune au plan (u) tout entier, et ces tranches sont partagées en deux ou en trois parties : en deux parties par la ligne Γ si la fonction est holomorphe, en trois par les lignes Γ et Γ' si elle est méromorphe. Les points du plan (z) qui représentent les valeurs exceptionnelles appartiennent à la partie médiane si la fonction est méromorphe. Ces résultats rentrent comme cas particuliers dans ceux qui seront démontrés dans le paragraphe suivant.

§ 6. — GÉNÉRALISATION COMPLÈTE DU THÉORÈME DE PICARD ET DE SES CONSÉQUENCES

21. — Définition générale d'une valeur exceptionnelle. — Les valeurs exceptionnelles considérées jusqu'ici jouissent d'une *propriété caractéristique* établie aux n^{os} 5 et 18. On généralise considé-

rablement la notion de *valeur exceptionnelle* en prenant cette propriété comme définition. Le théorème de Picard est maintenu et s'applique, non seulement aux fonctions qui ne prennent pas on ne prennent qu'un nombre limité de fois certaines valeurs, mais aussi à celles qui prennent toutes leurs valeurs une infinité de fois. Cette définition générale est la suivante :

Soit $u = f(z)$ une fonction analytique uniforme, une valeur particulière α est exceptionnelle si l'on peut mener dans le plan (z) une ligne continue s'écartant à l'infini et sur laquelle $f(z)$ converge vers α à l'infini.

Dans la suite, il sera toujours entendu que cette ligne ne passe par aucun représentant du point α. Un déplacement aussi petit qu'on veut de la ligne suffit pour écarter cette rencontre.

22. — Théorème général de Picard, — *Une fonction analytique uniforme admet au plus, au sens général, deux valeurs exceptionnelles.*

La démonstration est celle exposée au n° 19. La propriété sur laquelle repose cette démonstration est prise ici comme définition.

23. — Définition des lignes Δ et δ. — Supposons la fonction $f(z)$ méromorphe et soient α et α' deux valeurs exceptionnelles finies. On peut, par hypothèse, mener dans le plan (z) une ligne simple, infinie dans un sens, sur laquelle $f(z)$ converge à l'infini vers α, et une autre ligne analogue sur laquelle $f(z)$ converge à l'infini vers α' (n° 21). En raccordant ces deux lignes, on forme la ligne Δ. La ligne Δ est donc infinie dans les deux sens, et $f(z)$ converge à l'infini sur cette ligne, d'un côté vers α, et de l'autre vers α'.

A la ligne Δ correspond sur le plan (u) une ligne bornée δ qui relie α à α'. Sur le domaine (u), la ligne δ ne se coupe pas, et il y a correspondance biuniforme entre ses points et ceux de Δ.

24. — Définition des lignes γ et Γ. — Décrivons un contour simple γ enfermant le point α et excluant α'. Sur le domaine (u), ce contour ne doit couper δ qu'en un point. Si cette condition n'est pas remplie, on la réalise comme il suit. Soit pq un arc de γ comprenant tous les points d'intersection de γ avec δ, et PQ l'arc coupant Δ qui lui correspond dans le plan (z). On peut joindre P à Q par un nouvel arc PQ ne coupant Δ qu'en un point. On substitue à pq dans γ celui qui correspond au nouvel arc PQ. Le contour γ modifié ne coupe plus δ qu'en un point sur le domaine (u).

25. — Théorème. — *La ligne* Γ *est une ligne ouverte qui se prolonge à l'infini dans les deux sens. Le point* z *la décrit tandis que* u *tourne indéfiniment autour de* γ.

Soit u_0 le point d'intersection de γ et δ, et soit z_0 le point d'intersection correspondant de Γ et Δ. La ligne Γ est une ligne simple qui ne se ferme pas. Il suffit de considérer la branche décrite dans un sens à partir de z_0. Cette branche ne peut faire de boucle, car γ n'en fait pas. Elle ne peut non plus se fermer en revenant en z_0 par l'autre côté de Δ, car elle devrait recouper Δ qui est une transversale du plan, tandis que γ ne recoupe pas δ. La ligne Γ est infinie dans les deux sens. Même démonstration qu'au n° 10.

La ligne Γ est une transversale du plan (z). Elle le partage en deux moitiés. L'une correspond à l'intérieur de γ, l'autre au reste du plan (u).

26. — Théorème. — *La moitié du plan* (z) *limitée par* Γ *qui correspond à l'intérieur de* γ, *ne contient aucun point représentant un point exceptionnel.*

Cette moitié ne contient aucun représentant de α', car α' est exclu de γ. Nous allons prouver qu'elle ne contient aucun représentant de α.

Rétrécissons progressivement le contour γ autour du point α de manière qu'il se réduise à ce point à la limite. La ligne correspondante Γ balaie progressivement celle des deux moitiés du plan (z) qui correspond à l'intérieur de γ, et la valeur de $f(z)$ tend vers la valeur α sur la ligne sans passer par cette valeur. A supposer que la moitié considérée contienne des représentants de α, la ligne Γ, toujours mobile dans le même sens, ne pourrait dépasser ces points et convergerait vers une ligne limite intérieure au plan (z), sur laquelle $f(z)$ serait égale à α. La fonction, constante sur une ligne, se réduirait à une constante dans tout le plan.

27. — La ligne Γ'. — La définition de la ligne Γ se rattache à la considération du point α (n° 24). Celle de la ligne Γ' se rattache à celle du point α'. Soit γ' un contour simple enfermant α', excluant le contour γ, coupant donc δ en un point seulement sur le domaine (u). La ligne Γ' est la ligne, analogue à Γ, qui correspond à γ' sur le plan (z). C'est, pour les mêmes raisons que Γ (n° 25), une ligne ouverte et illimitée dans les deux sens. Comme γ et γ', les lignes Γ et Γ'

ne se coupent pas. Elles partagent le plan (z) en trois parties : une partie centrale et deux parties latérales. L'une de ces dernières correspond à l'intérieur de γ, l'autre à celui de γ'. Elles excluent l'une et l'autre tout représentant d'un point exceptionnel, car la démonstration précédente est valable pour les deux (n° 26).

28. — Partage du plan (z) en tranches. — Soient u_o et u_o' les points d'intersection de δ avec γ et avec γ' respectivement. Quand u tourne indéfiniment autour de γ, le point u_o a sur Γ une suite illimitée de représentants z_o, z_1, z_2, ... z_n, ... De même, quand u tourne sur γ', le point u'_o a une infinité de représentants z'_o, z'_1, ... z'_n, ... sur Γ'. Par chaque point z_n de Γ, menons la ligne Δ_n qui correspond à δ. Cette ligne coupe Γ et Γ' et se prolonge à l'infini dans les parties latérales du plan où elles ne peuvent aboutir au représentant d'un point exceptionnel (qui est exclu). La ligne Δ_n est une transversale du plan (z). Quand z tend vers l'infini sur cette ligne, $f(z)$ converge vers α dans un sens, et vers α' dans l'autre. Comme δ ne se coupe pas sur le domaine (u), les lignes Δ_n ne se rencontrent pas. Elles partagent le plan (z) en une suite illimitée de tranches successives. Chaque tranche représente le plan (u) tout entier, car ses frontières correspondent à la ligne δ qui ne partage pas le domaine (u) (n° 6).

La ligne Δ_n porte les points z_n et z'_n qui correspondent à u_o et u_o' par définition. La ligne Γ passe par les points z_n par définition aussi de ces points. La ligne Γ' coupe la ligne Δ_n, et cela au point z'_n car δ ne coupe γ' qu'en un point.

29. — Partage des tranches. — Chaque tranche est traversée par un arc de Γ et un arc de Γ'. Le premier correspond à un tour de u sur γ, le second à un tour de u sur γ'. Ces segments de Γ et de Γ' partagent la tranche en trois parties : deux bouts et une partie médiane. Les bouts correspondent respectivement aux intérieurs de γ et de γ', la partie médiane au reste du plan.

La partie médiane contient un pôle, sinon $f(z)$, bornée dans la tranche, le serait dans tout le plan, et $f(z)$ se réduirait à une constante.

Seule, la partie médiane peut contenir le correspondant d'une valeur exceptionnelle. Comme elle est bornée, elle n'en peut contenir qu'un nombre borné. Une valeur exceptionnelle qui est atteinte une infinité de fois, sera donc atteinte dans une infinité de tranches. Mais il peut éventuellement exister des systèmes de tranches distincts (n° 12) recouvrant des régions différentes du plan.

30. — Structure de la fonction. — La décomposition du plan (z) en tranches, chacune divisée, met *en perspective* la structure de la fonction. La démonstration des théorèmes y est apparente et elle montre comment les choses se passent. Tel est le cas pour le comportement de la fonction à l'infini. Si z tend vers l'infini dans une tranche, $f(z)$ converge vers l'une des deux valeurs exceptionnelles. Si z tend vers l'infini sur une ligne qui traverse une infinité de tranches, deux cas sont possibles. Si la ligne s'écarte indéfiniment des lignes Γ et Γ', $f(z)$ tend vers une des valeurs exceptionnelles; dans le cas contraire, $f(z)$ passe par des oscillations finies à la traversée de chaque tranche et ne peut converger vers aucune limite déterminée.

Le théorème appelle aussi une observation. Soit a une valeur particulière non exceptionnelle. Elle est prise dans chaque tranche. On peut mener à l'infini une ligne passant par tous ces représentants de a. Donc, quelle que soit la valeur proposée, on peut mener à l'infini une ligne sur laquelle $f(z)$ passe une infinité de fois par cette valeur, ou converge vers elle à la limite.

31. — Fonctions admettant les deux valeurs exceptionnelles α et ∞. — Les conclusions précédentes supposent que les deux valeurs exceptionnelles α et α' sont finies. La structure de la fonction $f(z)$ devient différente si $\alpha' = \infty$. Le point α' est rejeté à l'infini, et la ligne Γ' disparaît. La tranche n'est plus divisée qu'en deux parties. L'une correspond à l'intérieur du contour γ autour de α, et l'autre au reste du plan (u). Cette seconde partie contient tous les pôles et tous les représentats de α que peut éventuellement renfermer la tranche. S'il n'y a qu'un nombre limité de pôles, ils n'entrent que dans un nombre limité de tranches et, dans le reste du plan, la structure de la fonction est celle d'une fonction holomorphe.

A. S. Eddington's E-numbers

BY

André DEPRIT,
Christ's College, Cambridge

As a corner-stone of his «Fundamental Theory», A. S. Eddington lays a non-commutative algebra of rank 16 over the field of complex numbers, whose elements are called E-numbers. This algebra was first considered in relation to Dirac's first order wave equation and revealed itself there as the irreducible linear representation over the field of complex numbers of the Dirac's group [4]. G. Temple [16] very soon after set up a more abstract approach, defining the algebra of E-numbers by giving a base and a table of multiplication; but still, in order to penetrate the structure of such an algebra, we were left to use the algebra isomorphism which relates it to the algebra of matrices of order 4. However A. S. Eddington would have prefered a more intrinsic tool rather than a particular representation. Most of the elements required to state a definition of that kind are to be found in a note of G. Lemaître [12], where the author shows that the algebra of E-numbers on the complex numbers is the «product» (by our terminology, the «tensor product») of two complex quaternion algebras. From now on, the relation between E-numbers and quaternions is clearly perceived, so that in *Fundamental Theory*, A. S. Eddington calls an E-number a *double quaternion*; but his exposition still leans heavily on the particular representation by 4×4-matrices. Another relation of E-numbers to quaternions helps C. W. Kilmister [11] to define E-numbers as endomorphisms of a quaternion algebra considered as a vector space; this definition shows that W. R. Hamilton met already E-numbers, when in his *Elements of Quaternions* [10] he dealt with *linear quaternion functions*.

We have adopted G. Lemaître's point of view to define *generalised sedenion algebras* as *tensor products* of two *generalised quaternion algebras* on the same commutative ring with a unit element (§ **1**). While examining some representations of the generalised sedenion

algebras, we prove the equivalence between the definition given by G. Lemaître [12] and that given by C. W. Kilmister [11] (§ **2**). Among all linear forms on this algebra, considered now as a vector space, we characterise the *quarterspur* defined by A.S. Eddington (§ **3**). For generalised sedenion algebras over an algebraically closed commutative field of characteristic $\neq 2$, we establish the isomorphism with the algebra of matrices of order 4, and deduce therefrom A. S. Eddington's *Coupling Theorem*, his fundamental proposition about the *transformations of complete orthogonal sets* and the meaning of the «spectral sets» (§ **4**). On the base vectors and their symmetrical elements, the multiplication in the particular class of (ordinary) sedenion algebras determines a group structure of order 32, which is the Dirac group. By means of this representation of the Dirac group, it is easy to study several of its elementary properties, v.g. a classification of its subgroups (§ **5**). Then we show how sedenion algebras are used to clear up the structure of the algebra of the Dirac group with respect to a commutative field of characteristic $\neq 2$ (§ **6**). It is easily shown that the first Clifford algebra over a four-dimensional *metric* vector space is isomorphic to a generalised sedenion algebra; conversely from any generalised sedenion algebra over a commutative field of characteristic $\neq 2$, we can associate a non degenerate symmetric bilinear form over a four-dimensional vector space such that its Clifford algebra is isomorphic to the generalised sedenion algebra (§ **7**). In the same way, it has been proved that the second Clifford algebra over a five-dimensional *metric* vector space is also isomorphic to a generalised sedenion algebra; we prove the converse of this proposition (§ **8**). These last two sections show how Eddington introduces his Four-Dimensional and Five-Dimensional Theories, and they eventually point out that A. S. Eddington's interpretation of Dirac's wave equation assumes a four-dimensional vector space which is not only *affine*, as it is stated by C. W. Kilmister [11], but also *metric*. Finally by introducing a Clifford algebra over a six-dimensional metric vector space, we show what A. S. Eddington means exactly when he states that, in the vector base of a generalised sedenion algebra, the fifteen elements distinct of the unit form an antisymmetrical tensor of the second rank in the 6-space (§ **9**).

Our terminology and notations are, as far as possible, those of N. Bourbaki [1] [2].

1. Definition

Let A be a commutative ring with a unit element, which we represent by 1.

A *generalised quaternion algebra* over A with respect to the pair (α, β) of elements of A is an algebra $\Omega(A; \alpha, \beta)$ on A with a base of four elements; one of them is supposed to be the unit element of the algebra, which we identify with the unit element 1 of A; the three other elements (e_1, e_2, e_3) of the base are multiplied according to the following table:

$$e_1^2 = \alpha \qquad e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$$
$$e_2^2 = \beta \qquad e_2 e_3 = -e_3 e_2 = -\beta e_1$$
$$e_3^2 = -\alpha\beta \qquad e_3 e_1 = -e_1 e_3 = -\alpha e_2$$

We assume moreover that $\alpha\beta \neq 0$.

$(e_0 = 1, e_1, e_2, e_3)$ is called a canonical base of $\Omega(A; \alpha, \beta)$.

Definition 1. — *A generalised sedenion algebra over A with respect to the quadruple* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *of elements of* A *is the tensor product of the algebras* $\Omega(A; \alpha, \beta)$ *and* $\Omega(A; \gamma, \delta)$.

It is thus an algebra over A with a base of sixteen elements and it is represented by $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

If (e_0, e_1, e_2, e_3) (resp. (f_0, f_1, f_2, f_3)) is a canonical base of $\Omega(A; \alpha, \beta)$ (resp. $\Omega(A; \gamma, \delta)$), then, by definition the tensor products $k_{ij} = e_i \otimes f_j$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 3)$ form a base of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, which we call a *canonical base.*

It is trivially known that

(*i*) $\Omega(A; \alpha, \beta)$ is isomorphic to the algebra $\Omega(A; \beta, \alpha)$;

(*ii*) if α and λ are inversible elements of A, then $\Omega(A; \alpha, \beta)$ is isomorphic to the algebra $\Omega(A; \alpha, -\lambda\alpha\beta)$;

(*iii*) if λ and μ are inversible elements of A, then $\Omega(A; \alpha, \beta)$ is isomorphic to the algebra $\Omega(A; \lambda^2\alpha, \mu^2\beta)$.

From these three algebra isomorphisms and from well known properties of tensor products of algebras, we can prove at once the following proposition and its corollary.

Proposition 1

(*i*) $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *is isomorphic to the algebra* $\Sigma(A; \gamma, \delta, \alpha, \beta)$.

(*ii*) $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *is isomorphic to the algebras* $\Sigma(A; \beta, \alpha, \gamma, \delta)$ *and* $\Sigma(A; \alpha, \beta, \delta, \gamma)$.

(*iii*) *If* α *and* λ (*resp.* γ *and* μ) *are inversible in* A, *then* Σ (A; α, β, γ, δ) *s isomorphic to the algebra* Σ (A; α, $-\lambda\alpha\beta$, γ, δ) (*resp.* Σ (A; α, β, γ, $-\mu\gamma\delta$).

(*iv*) *If* λ, μ, ν, π *are four inversible elements of* A, *then* Σ (A; α, β, γ, δ) *s isomorphic to the algebras* Σ (A; $\lambda^2\alpha$, $\mu^2\beta$, γ, δ), Σ (A; α, β, $\nu^2\gamma$, $\pi^2\delta$) *and* Σ (A; $\lambda^2\alpha$, $\mu^2\beta$, $\nu^2\gamma$, $\pi^2\delta$).

COROLLARY

(*i*) *When* A *is the field* **R** *of real numbers, then all generalised sedenion algebras* Σ (**R**; α, β, γ, δ) *such that* $\alpha < 0$, $\beta < 0$ (*resp.* $\gamma < 0$, $\delta < 0$) *are isomorphic to the algebras* Σ (**R**; -1, -1, γ, δ) (*resp.* Σ (**R**; α, β, -1, -1)); *all generalised sedenion algebras such that* $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, $\delta < 0$ *are isomorphic to the algebra* Σ (**R**; -1, -1, -1, -1).

(*ii*) *When* A *is the field* **C** *of complex numbers, then all generalised sedenion algebras* Σ (**C**; α, β, γ, δ) *are isomorphic to the algebra* Σ (**C**; -1, -1, -1, -1).

We make from now on the convention of calling Σ (A; -1, -1, -1, -1) *the* sedenion algebra over A.

According to A. S. Eddington, an E-number is an element of the complex sedenion algebra; instead of the canonical base $(k_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant 3}$, A. S. Eddington uses the following bases

$$k'_{0i} = k_{0i} \quad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$
$$k'_{i0} = k_{i0} \quad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$
$$k'_{ij} = \varepsilon k_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$$
$$k'_{00} = \varepsilon k_{00}$$

where $\varepsilon = \pm i$.

Since definition 1 imposes on the quadruple (α, β, γ, δ) the two restrictions $\alpha\beta \neq 0$ and $\gamma\delta \neq 0$, it would be interesting to consider the cases where either $\alpha\beta = 0$ or (resp. and) $\gamma\delta = 0$.

To this end, let us assume that K is a commutative field of characteristic $\neq 2$. Ω (K; α, 0) is an algebra over K of dimension 4, a base of which is ($e_0 = 1$, e_1, e_2, e_3); its multiplication table is derived from that one of a generalised quaternion algebra Ω (K; α, β) where one makes $\beta = 0$. $\mathfrak{a}$ is the set of all $y \in \Omega$ (K; α, 0) such that $y^2 = 0$. The following facts are well known:

(*i*) $\mathfrak{a}$ is a two-sided ideal of Ω (K; α, 0)

(*ii*) If α is not a square of K, then dim $\mathfrak{A} = 2$ and $\Omega(K; \alpha, 0)/\mathfrak{A}$ is a commutative field, isomorphic to a quadratic extension of K.

(*iii*) If α is a square of K, which is $\neq 0$, then dim $\mathfrak{A} = 2$ and $\Omega(K; \alpha, 0)/\mathfrak{A}$ is a commutative algebra, the direct compound of two fields isomorphic to K.

(*iv*) If $\alpha = 0$, then dim $\mathfrak{A} = 3$ and $\Omega(K; 0, 0)/\mathfrak{A}$ is a commutative field, isomorphic to K.

We consider now the algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)$ over K of dimension 16; the family $(k_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant 3}$, where $k_{00} = 1$ is one of its bases; we suppose that those elements have a multiplication table, which is derived from that one of a generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ by making $\delta = 0$. (We are evidently assuming that $\alpha\beta \neq 0$).

Clearly $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)$ is the tensor product of the algebras $\Omega(K; \alpha, \beta)$ and $\Omega(K; \gamma, 0)$. The set generated by the elements $x \otimes y$ such that $y^2 = 0$ is a vector subspace of $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)$ of the form $\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b})$: by that symbol, we mean the linear extension of all tensor products $x \otimes y$ where either $x = 0$ or $y \in \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ being in $\Omega(K; \gamma, 0)$ the set of all y such that $y^2 = 0$.

These remarks and some elementary properties of tensor products of algebras give us the

Proposition 2. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$. *In the algebra* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)$ *over* K, $\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b})$ *is a two-sided ideal. If* γ *is not a square in* K, *then* dim $\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b}) = 8$ *and* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)/\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b})$ *is an algebra over* K, *isomorphic to the tensor product of* $\Omega(K; \alpha, \beta)$ *by a field which is a quadratic extension of* K. *If* γ *is a square of* K, *which is* $\neq 0$, *then* dim $\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b}) = 8$ *and* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, 0)/\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b})$ *is an algebra, isomorphic to the tensor product of* $\Omega(K; \alpha, \beta)$ *by the direct compound of two fields isomorphic to* K. *If* $\gamma = 0$, *then* dim $\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b}) = 12$ *and* $\Sigma(K; \alpha, \beta, 0, 0)/\Gamma(\{0\}, \mathfrak{b})$ *is isomorphic to* $\Omega(K; \alpha, \beta)$.

By $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0)$, we denote an algebra of dimension 16 over K; we assume that the family $(k_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant 3}$ is one of its bases, such that $k_{00} = 1$ and that those basic elements have a multiplication table derived from that one of a generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ by making $\beta = \delta = 0$.

Here again $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0)$ is the tensor product of the algebras $\Omega(K; \alpha, 0)$ and $\Omega(K; \gamma, 0)$. We consider the two-sided ideal $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) in $\Omega(K; \alpha, 0)$ (resp. $\Omega(K; \gamma, 0)$) consisting of all elements x (resp. y) such that $x^2 = 0$ (resp. $y^2 = 0$); $\Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ represents the

ector subspace of $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0)$ which is the linear extension f the tensor products $x \otimes y$ where $x \in \mathfrak{a}$ or $y \in \mathfrak{b}$.

From the remarks which precede proposition 2 and from trivial roperties of tensor products of algebras follows at once the

PROPOSITION 3. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$. *n the algebra* $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0)$ *over* K, $\Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *is a two-sided ideal. f* α *is not a quare in* K, *then* $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0) / \Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *is isomorphic o the tensor product of a field, which is a quadratic extension over* K *y either another field which is a quadratic extension over* K, *if* γ *is ot a square in* K, *or a direct compound of two fields isomorphic to* K, *f* γ *is a square* $\neq 0$ *in* K; *finally if* $\gamma = 0$, $\Sigma(K; \alpha, 0, 0, 0) / \Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *s isomorphic to a field which is a quadratic extension over* K.

If α *is a square* $\neq 0$ *in* K, *then* $\Sigma(K; \alpha, 0, \gamma, 0) / \Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *is isomorphic o the tensor product of two direct compounds, each of two fields which re both isomorphic to* K, *in the case when* γ *is a square* $\neq 0$ *in* K; *f* $\gamma = 0$, *then* $\Sigma(K; \alpha, 0, 0, 0) / \Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *is isomorphic to the direct ompound of two fields isomorphic to* K.

If $\alpha = \gamma = 0$, *then* $\Sigma(K; 0, 0, 0, 0) / \Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *is isomorphic to* K.

PROPOSITION 4. — *Let* A *be a commutative ring with a unit element. The generalised sedenion algebra* $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *is commutative if nd only if* A *is of characteristic* 2.

Proof: The condition is necessary: for, if the characteristic of $A \neq 2$, then $k_{01} k_{23} = -k_{23} k_{01} = \gamma k_{22}$ for instance.

Conversely, if A is of characteristic 2, then $\Omega(A; \alpha, \beta)$ and $\Omega(A; \gamma, \delta)$ are commutative algebras and consequently their tensor roduct $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is commutative as well.

The following proposition states some other elementary properties f $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ when the characteristic of A is 2.

PROPOSITION 5. — *Let* A *be a commutative ring with a unit element nd of characteristic* 2.

(*i*) *For all* $x \in \Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $x^2 \in A$.

(*ii*) *The subalgebra* A_x *of* $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *generated by an element* $\in A$ *is a quadratic extension over* A *whose base is* $(1, x)$.

(*iii*) *The set* B *of all elements* x *of* $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *such that* $x^2 = \lambda^2$ $\lambda \in A$) *is a unitary submodule of* $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Proof: If $x = \sum_{0 \leqslant i, j \leqslant 3} x_{ij} k_{ij}$, then $x^2 = x_{00}^2 + d\, x_{10}^2 + \beta x_{20}^2 - \alpha\beta\, x_{30}^2$ $+ \gamma\,(x_{01}^2 + \alpha\, x_{11}^2 + \beta\, x_{21}^2 - \alpha\beta\, x_{31}^2) + \delta\,(x_{02}^2 + \alpha\, x_{12}^2 + \beta\, x_{22}^2 - \alpha\beta\, x_{32}^2)$ $- \gamma\,\delta\,(x_{03}^2 + \alpha\, x_{13}^2 + \beta\, x_{23}^2 - \alpha\beta\, x_{33}^2)$ which proves (*i*).

(*ii*) follows immediately from (*i*).

Finally, since $(x + y)^2 = x^2 + y^2 \in A$ and since $(\zeta x)^2 = (\zeta\lambda)^2 \in A$, for any $x \in \Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $y \in \Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ and $\zeta \in A$, (*iii*) follows at once.

2. Some representations of generalised sedenion algebras

The right homothety (a) of the algebra $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ corresponding to the element a is the endomorphism $x \to x\,a$ of the A-module of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. The set $\mathcal{H}(\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta))$ of all right homotheties of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is a subalgebra of the algebra $\mathcal{L}(\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta))$ over A of all endomorphisms of the A-module of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Since $1 = k_{00} \in \Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, the mapping $a \to (a)$ is an algebra isomorphism of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ onto $\mathcal{H}(\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta))$, which is called its *right regular representation*. Hence $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is isomorphic to a subalgebra of the algebra $\mathbf{M}_{16}(A)$ of matrices of ordre 16 on A.

In the particular case where $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is $\Sigma(\mathbf{C}; -1, -1, -1, -1)$, after substituting to the canonical base $(k_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant 3}$ the base (k'_{ij}) choosen by A. S. Eddington (cfr. remarks after Cor. Prop. 1), W. H. Mac Crea [14] gives explicitly the form of the matrix to be associated to each $x \in \Sigma(C; -1, -1, -1, -1)$ by the right regular representation.

When K is a commutative field with characteristic $\neq 2$, the generalised quaternion algebra $\Omega(K; \alpha, 1)$ is isomorphic to the algebra $\mathbf{M}_2(K)$ of matrices of order 2 on K. This fact and well known properties of tensor products bring out the following proposition.

Proposition 6. — *Let* K *be a commutative field with characteristic* $\neq 2$; *the generalised sedenion algebra* $\Sigma(K; \alpha, 1, \beta, 1)$ *is isomorphic to the algebra* $\mathbf{M}_4(K)$ *of matrices of order* 4 *on* K *and to the algebra* $\mathbf{M}_2(\Omega(K; \alpha, 1))$ *of matrices of order* 2 *on* $\Omega(K; \alpha, 1)$.

In fact $\Sigma(K; \alpha, 1, \beta, 1)$ is isomorphic to $\Omega(K; \alpha, 1) \otimes \mathbf{M}_2(K)$ which is isomorphic either to $\mathbf{M}_2(\Omega(K; \alpha, 1))$ or to $\mathbf{M}_2(K) \otimes \mathbf{M}_2(K)$, itself isomorphic to $\mathbf{M}_4(K)$.

PROPOSITION 7. — *Let* K *be a commutative field with characteristic* $\neq 2$; *the generalised sedenion algebra* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ *is isomorphic to the algebra* $\mathcal{L}(\Omega(K; \alpha, \beta))$ *of all endomorphisms of the* K*-vector space of* $\Omega(K; \alpha, \beta)$.

Proof: If $(e_0 = 1, e_1, e_2, e_3)$ is a canonical base of $\Omega(K; \alpha, \beta)$, then $q \to K_{ij}(q) = e_i q e_j$ is an endomorphism of the vector space $\Omega(K; \alpha, \beta)$. One sees easily that the family $(K_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant 3}$ is algebraically free in $\mathcal{L}(\Omega(K; \alpha, \beta))$ and since it is maximal, it is also a base. A routine check shows that the base (K_{ij}) of $\mathcal{L}(\Omega(K; \alpha, \beta))$ and the canonical base (k_{ij}) of $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ have similar multiplication tables. Thus the mapping $k_{ij} \to K_{ij}$ is an isomorphism of $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ onto the algebra $\mathcal{L}(\Omega(K; \alpha, \beta))$.

This proof, suggested by G. Temple [16], actually shows how to construct an algebra isomorphism between $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ and $\mathcal{L}(\Omega(K; \alpha, \beta))$. This last representation is used, in the particular case of $\Sigma(\mathbf{C}; -1, -1, -1, -1)$, by C. W. Kilmister [11] as the definition of a sedenion. Hence, when R. W. Hamilton [10] deals with linear quaternion functions, he is concerned with complex sedenions.

In the algebra $\Omega(A; \alpha, \beta)$, the mapping $x \to \bar{x}$ is an involutive algebra antiisomorphism of $\Omega(A; \alpha, \beta)$; on the other side, in $\Sigma(A; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$, the linear mapping J such that $J(y \otimes z) = z \otimes y$ for all y and $z \in \Omega(A; \alpha, \beta)$ is an involutive algebra antiisomorphism of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$. It follows then that the linear mapping $x \to x'$ such that $(y \otimes z)' = J(y \otimes z)$ is an involutive algebra isomorphism of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$. W. R. Hamilton ([10], p. 555, Equation of conjugation IV) calls x' the *conjugate* (sedenion) of x.

5. Quarterspur

DEFINITION 2. — *For any* $x \in \Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *such that* $x = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} x_{ij} k_{ij}$, *the quaterspur* $qs(x)$ *of* x *is the scalar* $x_{00} \in A$.

Thus $x \to qs(x)$ is a linear form on $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Since we identify A and $A k_{00}$, we can also consider qs as the projection of the A-module $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ onto the one-dimensional module $A k_{00}$.

In the case when K is a commutative field of characteristic $\neq 2$, we shall characterise qs among other linear forms on the generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$.

PROPOSITION 8. — *Let* K *be a commutative field with characteristic* $\neq 2$. *For any* $x, y \in \Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$, *one has* $qs(xy) = qs(yx)$. *Conversely, if* f *is a linear form on* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *such that* $f(xy) = f(yx)$ *identically, then there exists a scalar* $\rho \in K$ *such that* $f(x) = \rho\, qs(x)$ *for any sedenion* x.

Proof: For any $x = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} x_{ij} k_{ij} \in \Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$, one has $x k_{lm} = x_{lm} k_{lm}^2 + \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant 3 \\ i \neq l, j \neq m}} x_{ij} k_{ij} k_{lm}$ and thus $qs(x k_{lm}) = x_{lm} k_{lm}^2$ for $0 \leqslant l, m \leqslant 3$. On the same way, one proves that $qs(k_{lm} x) = x_{lm} k_{lm}^2$ for $0 \leqslant l, m \leqslant 3$. Thus for any $x \in \Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$, $qs(k_{lm} x) = qs(x k_{lm})$ $(0 \leqslant l, m \leqslant 3)$. Hence, if $y = \sum_{0 \leqslant l,m \leqslant 3} y_{lm} k_{lm}$, then $qs(xy) = qs(yx)$ $= \sum_{0 \leqslant l,m \leqslant 3} y_{lm} x_{lm} k_{lm}^2$, which proves the first part of the proposition. It also shows that, if f is a linear form on $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, then f can be written in one and only one way as $x \to qs(xy)$ where y is a fixed sedenion. In fact, one has $f(x) = f(\sum_{i,j} x_{ij} k_{ij}) = \sum_{i,j} x_{ij} f(k_{ij})$ and one can put $y = \sum_{i,j} k_{ij}^{-2} f(k_{ij}) k_{ij})$ so that $f(x) = qs(xy)$. $f(x)$ is identically null if and only if $y = 0$.

Therefore for any given linear form f on $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$, there exists one and only one $y \in \Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ such that $f(x) = qs(xy)$ for all x. Then the condition $f(xz) = f(zx)$ can be written $qs(xzy)$ $= qs(zxy) = qs(xyz)$, which gives $qs(x(yz - zy)) = 0$. Since it is an identity in x, it follows that $zy - yz = 0$, which implies $y = \rho 1$ (from prop. 7, $\Sigma(K; \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ is a central simple algebra).

4. Sedenion algebras over an algebraically closed commutative field of characteristic $\neq 2$

Let K be an algebraically closed commutative field of characteristic $\neq 2$.

By prop. 1 (*iv*), $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1) = \Sigma(K; \varkappa^2, \varkappa^2, \varkappa^2, \varkappa^2)$, where $\varkappa = \sqrt{-1}$ in K, is isomorphic to $\Sigma(K; 1, 1, 1, 1)$, which in turn is isomorphic to the algebra $\mathbf{M}_4(K)$, according to prop. 6.

PROPOSITION 9. — (*«Coupling Theorem»*). *If* K *is an algebraically closed commutative field of characteristic* $\neq 2$, *then the commutator of* $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ *is isomorphic to* K.

In fact, this proposition restates I Schur's lemma ([18], p. 83)

Lemma (3.1.C)), thank to the isomorphism $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1) \to \mathbf{M}_4(K)$ and the canonical identification of K with the one-dimensional algebra $K k_{00} = \{\lambda k_{00} : \lambda \in K\}$.

G. Temple [15] showed that A. S. Eddington's *Coupling Theorem* [5] is equivalent to prop. 10.

Let A be a commutative ring with a unit element. If q is an invertible element of A, then the mapping $x \to q x q^{-1}$ is an algebra automorphism of $\Sigma(A; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$; the images $k_{ij} = q k'_{ij} q^{-1}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 3)$ of the canonical base k_{ij} form another base of $\Sigma(A; \alpha, \delta, \gamma, \delta)$ which has the same multiplication table as the former canonical base. We note in particular that $k'_{00} = k_{00} = 1$. Conversely,

THEOREM 1. — *Let* K *be an algebraically closed commutative field of characteristic* $\neq 2$. *Any automorphism* φ *of the algebra* $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ *which leaves fixed each element of its centre (or equivalently such that* $\varphi(k_{00}) = k_{00}$*) is generated by an invertible element* $q \in \Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$: $\varphi(x) = q x q^{-1}$. q *is determined by* φ *up to an arbitrary scalar* $\in K^*$.

Being isomorphic to $\mathbf{M}_4(K)$, the algebra $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ is central simple; hence th. 1 restates the Noether-Skolem theorem ([18], th. (9.1.D) p. 282). If both q and $r \in \Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ generate φ, then, for any $x \in \Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$, $q x q^{-1} = r x r^{-1}$ or $r^{-1} q x = x r^{-1} q$ and prop. 9 secures the existence of $\lambda \in K^*$ such that $q = \lambda r$.

A. S. Eddington ([6], **2-7**, p. 27-29) proves th. 1, in the case where K is the complex field **C**, by a direct method without using the isomorphism $\mathbf{M}_4(\mathbf{C}) \to \Sigma(\mathbf{C}; -1, -1, -1, -1)$. It has also been proved by W. Pauli [15] for $\mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ by constructing one of the non-singular matrices which generate the automorphism.

Theorem 1 is the corner-stone on which A.S. Eddington edifies his «relativistic» interpretation of Quantum Mechanics.

From general properties of simple algebras, we know that the sedenion algebra $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ over a commutative algebraically closed field K of characteristic $\neq 2$ is the direct sum of four minimal left ideals which are isomorphic, when considered as K-vector spaces. Each of these left ideals is of the form $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)\, e$, where e is a *primitive idempotent* element of $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ (cfr. [18], p. 102). It is possible to find a set of four *normal* idempotents $(S_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant 4}$, each generating one

of the four minimal left ideals, and verifying the following relations

$$S_\alpha^2 = S_\alpha \qquad (1 \leqslant \alpha \leqslant 4)$$

$$S_\alpha S_\beta = 0 \qquad (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 4, \quad \alpha \neq \beta)$$

$$S_\alpha + S_\beta + S_\gamma + S_\delta = k_{00}.$$

A. S. Eddington ([7], p. 135) calls *spectral set* a set of normal idempotents in the complex sedenion algebra.

In Fundamental Theory ([7], p. 131-133), A. S. Eddington obtained a complete classification of all idempotents of the algebra $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$:

(*i*) *idempotent of rank* 0: $x = 0$.

(*ii*) *idempotents of rank* 1: they are the *primitive* idempotents generating minimal left ideals of $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$. The elements

$$x_1 = \frac{1}{4}k_{00} + \frac{k}{4}k_{01} - \frac{k}{4}k_{10} + \frac{1}{4}k_{11}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}k_{00} + \frac{k}{4}k_{01} + \frac{k}{4}k_{10} - \frac{1}{4}k_{11}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}k_{00} - \frac{k}{4}k_{01} + \frac{k}{4}k_{10} + \frac{1}{4}k_{11}$$

$$x_4 = \frac{1}{4}k_{00} - \frac{k}{4}k_{01} - \frac{k}{4}k_{10} - \frac{1}{4}k_{11},$$

for instance, are of this type (where $K = \sqrt{-1}$).

For x_1, the four-dimensional minimal left ideal $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$. x_1 is a vector subspace of $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$, whose base is given by the following elements

$$k_{00} + \varkappa k_{01} - \varkappa k_{10} + k_{11}$$

$$k_{02} - \varkappa k_{03} - \varkappa k_{12} - k_{13}$$

$$k_{20} + \varkappa k_{21} + \varkappa k_{30} - k_{31}$$

$$k_{22} - \varkappa k_{23} + \varkappa k_{32} + k_{33}.$$

Similar expressions are to be found for a base of the left ideals generated by the others x_2, x_3, x_4.

Among the spectral sets built by A. S. Eddington, is the one pro-

posed by G. Lemaître ([12], p. 167-168):

$$x'_1 = \frac{1}{4}(k_{00} + k_{01} + k_{22} + k_{33})$$

$$x'_2 = \frac{1}{4}(k_{00} + k_{11} - k_{22} - k_{33})$$

$$x'_3 = \frac{1}{4}(k_{00} - k_{11} + k_{22} - k_{33})$$

$$x'_4 = \frac{1}{4}(k_{00} - k_{11} - k_{22} + k_{33})$$

(*iii*) idempotents of rank 2: they are the idempotent elements of $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ generating left ideals of dimension 8. For instance, the elements $y_1 = \frac{1}{2}(k_{00} + \varkappa k_{01})$ and $y_2 = \frac{1}{2}(k_{00} - \varkappa k_{01})$; y_1 generates a left ideal whose base is formed by the elements

$$\frac{1}{2}(k_{00} + \varkappa k_{01}) \qquad \frac{1}{2}(k_{20} + \varkappa k_{21})$$

$$\frac{1}{2}(k_{03} + \varkappa k_{02}) \qquad \frac{1}{2}(k_{23} + \varkappa k_{22})$$

$$\frac{1}{2}(k_{10} + \varkappa k_{11}) \qquad \frac{1}{2}(k_{30} + \varkappa k_{31})$$

$$\frac{1}{2}(k_{13} + \varkappa k_{12}) \qquad \frac{1}{2}(k_{33} + \varkappa k_{32})$$

while the base of the left ideal generated by y_2 is constituted by

$$\frac{1}{2}(k_{00} - \varkappa k_{01}) \qquad \frac{1}{2}(k_{20} - \varkappa k_{21})$$

$$\frac{1}{2}(k_{03} - \varkappa k_{02}) \qquad \frac{1}{2}(k_{23} - \varkappa k_{22})$$

$$\frac{1}{2}(k_{10} - \varkappa k_{11}) \qquad \frac{1}{2}(k_{30} - \varkappa k_{31})$$

$$\frac{1}{2}(k_{13} - \varkappa k_{12}) \qquad \frac{1}{2}(k_{33} - \varkappa k_{32})$$

Since $y_1 + y_2 = k_{00}$ and $y_1 y_2 = y_2 y_1 = 0$, $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$

is the direct sum of these two left ideals. It is obvious that both ideals are isomorphic K-vector subspaces.

According to the general theory of simple algebras, every idempotent of rank 2 is the sum of two primitive normal idempotents of rank 1. In our particular case, for instance, $y_1 = x_1 + x_2$ and $y_2 = x_3 + x_4$.

(*iv*) *idempotents of rank* 3: y is idempotent of rank 3 if and only if there exists an idempotent x of rank 1 such that $y = 1 - x$.

(*v*) *idempotent of rank* 4: $x = 1$.

On those trivial features of the algebraic structure of the simple algebra Σ (K; —1, —1, —1, —1) depends A. S. Eddington's definition of a *pure particle* ([7], p. 137).

5. The Dirac group $\mathcal{S}$

By C_n we represent the cyclic group of order n ($n \in \mathbf{N}^*$). G (m, n, r, s) represents a group generated by two elements a and b verifying the following relations

$$a^m = e,\ b^n = a^r,\ b\,a\,b^{-1} = a^s$$

where m and n are two positive integers and r and s are two integers.

The groups G (n, 2, 0, —1) are called *dyhedral* groups of order $2n$ and represented by $\mathcal{D}_{2n}$; the group G(4, 2, 2, —1) is a group of order 8 called the *quaternionic group* and denoted by $\mathcal{Q}$.

By A $\times$ B we denote the product of the groups A and B.

They are two groups of order 4, both of them being Abelian : C_4 and $C_2 \times C_2$. Among the five groups of order 8, three are Abelian : C_8, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$; the other two are $\mathcal{D}_8$ and $\mathcal{Q}$. J. W. A. Young [17] gave a complete description of the fourteen groups of order 16, nine of them being non-Abelian. Among them we denote by $\mathcal{A}$ the group generated by two elements a and b satisfying the relations

$$a^4 = e,\ b^2 = e,\ ba^2b^{-1} = a^2$$

and by $\mathcal{B}$ the group generated by the three elements a, b and c satisfying the defining relations

$$a^4 = b^2 = c^2 = e,\ a\,b = b\,a,\ a\,c = c\,a,\ c\,b = a^2b\,c.$$

In a group G, the element $y^{-1}\,x^{-1}\,y\,x$ is called the *commutator* of the pair $x\,y$. D(G) represents the commutator group, i.e. the normal

subgroup G generated by its commutators, and by recurrence, one defines $D^k(G)$ as being the commutator group $D(D^{k-1}(G))$ of the group $D^{k-1}(G)$.

Definition 3. — *Let* A *be a commutative ring of characteristic* $\neq 2$ *with a unit element* 1. *In* $\Sigma(A; -1, -1, -1, -1)$, *the multiplication induces on the set* $\{\pm k_{ij} : 0 \leqslant i, j \leqslant 3\}$ *a structure of group* $\mathcal{S}$ *of order* 32, *which we call the Dirac group*

Proposition 10. —

(*i*) $\mathcal{S}$ *has seventeen conjugate classes.*

(*ii*) $D(\mathcal{S}) = \{\pm k_{00}\}$ *and* $\mathcal{S}$ *is resoluble.*

(*iii*) *Nineteen elements of* $\mathcal{S}$ *are of order* 2.

(*iv*) *The* 36 *subgroups of order* 4 *in* $\mathcal{S}$ *are divided in* 12 *subgroups isomorphic to* C_4 *and* 33 *subgroups isomorphic to* $C_2 \times C_2$. 21 *of them are normal.*

(*v*) *The* 32 *subgroups of order* 8 *in* $\mathcal{S}$ *are divided in* 9 *subgroups isomorphic to* $C_4 \times C_2$, 3 *subgroups isomorphic to* $C_2 \times C_2 \times C_2$, 2 *subgroups* $\mathcal{Q}_1$ *and* $\mathcal{Q}_2$ *isomorphic to* $\mathcal{Q}$ *and* 18 *subgroups isomorphic to* $\mathcal{D}_8$. *All of them are normal.*

(*vi*) *The* 15 *subgroups of order* 16 *in* $\mathcal{S}$ *are divided in* 9 *subgroups isomorphic to* $\mathcal{D}_8 \times C_2$ *and* 6 *subgroups isomorphic to* $\mathcal{B}$. *All of them are normal.*

(*vii*) *Each element of* $\mathcal{S}$ *is the product of an element of* $\mathcal{Q}_1$ *by an element of* $\mathcal{Q}_2$.

Proof

(*i*) It is easily shown that

$$\{k_{00}\},\ \{-k_{00}\},\ \{\pm k_{i0}\}_{1 \leqslant i \leqslant 3},\ \{\pm k_{0j}\}_{1 \leqslant j \leqslant 3},\ \{\pm k_{ii}\}_{1 \leqslant i, j \leqslant 3},$$

are the conjugate classes of $\mathcal{S}$.

(*ii*) In the same way, since for any $x \in \mathcal{S}$, x^{-1} is equal either to x or $-x$ and since x^2 is equal to $+k_{00}$ or $-k_{00}$, it follows at once that for any x and $y \in \mathcal{S}$, $y^{-1}x^{-1}yx = \pm k_{00}$; hence $D(\mathcal{S}) = \{\pm k_{00}\}$ and $D^2(\mathcal{S}) = \{k_{00}\}$. From this last equality, it follows that $\mathcal{S}$ is resoluble (or metabelian).

(*iii*) The elements $-k_{00}$, $\pm k_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ are cyclic of order 2.

(*iv*) The elements $\pm k_{io}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ and $\pm k_{oj}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ are

cyclic of order 4 and the groups they generate are normal subgroups of $\mathcal{S}$.

The sets $\{\pm k_{00}, \pm k_{ij}\}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ are subgroups of S isomorphic to $C_2 \times C_2$; since $y^{-1} x^{-1} y x = \pm k_{00}$ for every x and $y \in \mathcal{S}$. They are evidently normal subgroups of $\mathcal{S}$.

The other subgroups of order 4 are all isomorphic to $C_2 \times C_2$; they are generated by two elements k_{ij} and k_{lm} $(1 \leqslant i, j, l, m \leqslant 3)$ which are commuting. Selecting for each k_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ the four k_{lm} $(1 \leqslant l, m \leqslant 3)$ which commute with it, we have to consider The 36 sets $\{k_{00}, k_{ij}, k_{lm}, k_{ij}\, k_{lm}\}$. Only the 15 following ones are distinct:

$$\{k_{00}, k_{11}, k_{22}, k_{23}\}$$
$$\{k_{00}, k_{12}, k_{23}, k_{31}\}$$
$$\{k_{00}, k_{13}, k_{21}, k_{32}\}$$

$\{k_{00}, k_{11}, k_{23}, -k_{32}\}$ $\{k_{00}, k_{12}, k_{21}, -k_{33}\}$ $\{k_{00}, k_{13}, k_{22}, -k_{31}\}$
$\{k_{00}, k_{11}, -k_{23}, k_{32}\}$ $\{k_{00}, k_{12}, -k_{21}, k_{33}\}$ $\{k_{00}, k_{13}, -k_{22}, k_{31}\}$
$\{k_{00}, -k_{11}, k_{23}, k_{32}\}$ $\{k_{00}, -k_{12}, k_{21}, k_{33}\}$ $\{k_{00}, -k_{13}, k_{22}, k_{31}\}$
$\{k_{00}, -k_{11}, -k_{23}, -k_{32}\}$ $\{k_{00}, -k_{12}, -k_{21}, -k_{33}\}$ $\{k_{00}, -k_{13}, -k_{22}, -k_{31}\}$

None of these subgroups is normal in $\mathcal{S}$.

(*v*) Among the subgroups of $\mathcal{S}$ of order 8, none is of the form C_8.

Abelian subgroups of the form $C_4 \times C_2$ should be generated by an element of order 4 and an element of order 2, both commuting. But the only elements of order 2 commuting with k_{0i} are k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}; if a subgroup $C_4 \times C_2$ is generated by k_{0i}, it can also be considered as being generated by $-k_{0i}$; if it is generated by k_{0i} and k_{ji}, then it can also be generated by k_{0i} and $-k_{ji}$, or by k_{j0} and k_{ij}, or by $-k_{j0}$ and k_{ji} or by $-k_{j0}$ and $-k_{ji}$. It follows that $\mathcal{S}$ contains 9 subgroups isomorphic to $C_4 \times C_2$ which are

$$\{\pm k_{00}, \pm k_{0i}, \pm k_{j0}, \pm k_{ji}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$$

All of them are normal in $\mathcal{S}$.

Abelian subgroups isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$ are generated by three commuting elements of order 2. As we know from (*iv*), those sets are $\{\pm k_{11}, \pm k_{23}, \pm k_{32}\}$, $\{\pm k_{12}, \pm k_{21}, \pm k_{33}\}$ and $\{\pm k_{13}, \pm k_{22}, \pm k_{31}\}$. If in those sets, we take the elements with the signs given at the end of (*iv*), we find that they generate subgroups isomorphic to $C_2 \times C_2$. For other choices of signs, each of these

sets will give only one distinct subgroup of order 8. Thus the subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$ are

$$\{\pm k_{00},\ \pm k_{11},\ \pm k_{23},\ \pm k_{32}\}$$
$$\{\pm k_{00},\ \pm k_{12},\ \pm k_{21},\ \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00},\ \pm k_{13},\ \pm k_{22},\ \pm k_{31}\}$$

They are clearly all normal in $\mathcal{S}$.

The subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to $\mathcal{Q}$ are generated by two non-commuting elements of order 4. Therefore $\mathcal{S}$ contains only two quaternionic subgroups $\mathcal{Q}_1 = \{\pm k_{io} : 0 \leqslant i \leqslant 3\}$ and $\mathcal{Q}_2 = \{\pm k_{oj} : 0 \leqslant j \leqslant 3\}$, both being normal in $\mathcal{S}$.

The subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to $\mathcal{D}_8$ are generated by two non-commuting elements, one of order 4 and the other of order 2. To each element of order 4 are associated six non-commuting elements of order 2 and their combinations give rise to 3 distinct subgroups $\mathcal{D}_8$. Among those 36 sets, 18 only are distinct:

$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{12}, \pm k_{13}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{10}, \pm k_{21}, \pm k_{31}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{22}, \pm k_{23}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{10}, \pm k_{22}, \pm k_{32}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{32}, \pm k_{33}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{10}, \pm k_{23}, \pm k_{33}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{11}, \pm k_{13}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{20}, \pm k_{11}, \pm k_{31}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{21}, \pm k_{23}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{20}, \pm k_{12}, \pm k_{32}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{31}, \pm k_{33}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{20}, \pm k_{13}, \pm k_{33}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{11}, \pm k_{12}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{30}, \pm k_{11}, \pm k_{21}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{21}, \pm k_{22}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{30}, \pm k_{12}, \pm k_{22}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{31}, \pm k_{32}\}$ $\{\pm k_{00}, \pm k_{30}, \pm k_{13}, \pm k_{23}\}$

They are all normal in $\mathcal{S}$.

(*vi*) Since no element is of order 8 or 16, they are no subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to C_{16}, $C_8 \times C_2$, G (8, 2, 0, 3), G (8, 2, 0, —3), G (8, 2, 0, —1), G (8, 2, 4, —1).

A subgroup isomorphic to $C_4 \times C_4$ should be generated by two distinct commuting generators of order 4; since $k^2_{oi} = k^2_{jo} = -k_{00}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$, there is no subgroup of the type $C_4 \times C_4$.

Any subgroup isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$ should be generated by four distinct commuting generators of order 2; but there exists no quadruple of $(\pm k_{ij})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$, all of order 2 and at the same time commuting among themselves.

Subgroups isomorphic to $C_4 \times C_2 \times C_2$ should be generated

by three distinct commuting elements, one of order 4 and the two others of order 2: those sets are $\{k_{0i}, \pm k_{ii}\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ or $\{k_{j0}, \pm k_{jj}\}_{1 \leqslant j \leqslant 3}$, but they generate subgroups isomorphic to $C_4 \times C_2$ as it is seen in (*vi*).

Subgroups isomorphic to $\mathcal{D}_8 \times C_2$ are obtained by multiplying each group $\mathcal{D}_8$ of (*vi*) by an element of order 2 which commute with all its elements. But for each k_{0i} or k_{j0} $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ they are two elements of that kind. Moreover the groups $\mathcal{D}_8$ of the second column in (*vi*) by multiplication by a C_2 restitute the group $\mathcal{D}_8 \times C_2$ obtained from the first column by the same way. Finally, as it is easily seen the 18 sets obtained from that first column give 9 distinct subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to $\mathcal{D}_8 \times C_2$. They are

$$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{12}, \pm k_{13}, \pm k_{20}, \pm k_{21}, \pm k_{32}, \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{12}, \pm k_{13}, \pm k_{22}, \pm k_{23}, \pm k_{30}, \pm k_{31}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{10}, \pm k_{11}, \pm k_{22}, \pm k_{23}, \pm k_{32}, \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{11}, \pm k_{13}, \pm k_{20}, \pm k_{22}, \pm k_{31}, \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{11}, \pm k_{13}, \pm k_{21}, \pm k_{23}, \pm k_{30}, \pm k_{32}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{10}, \pm k_{12}, \pm k_{21}, \pm k_{23}, \pm k_{31}, \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{11}, \pm k_{12}, \pm k_{20}, \pm k_{23}, \pm k_{31}, \pm k_{32}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{11}, \pm k_{12}, \pm k_{21}, \pm k_{22}, \pm k_{30}, \pm k_{33}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{10}, \pm k_{13}, \pm k_{21}, \pm k_{22}, \pm k_{31}, \pm k_{32}\}$$

Since they are no elements of order 2 commuting with the three elements $(k_{0i})_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ or with the three elements $(k_{j0})_{1 \leqslant j \leqslant 3}$, they are no subgroups of $\mathcal{S}$ isomorphic to $\mathcal{Q} \times C_2$.

There is no subgroup of S isomorphic to G (4, 4, 0, —1); for either the two generators would be k_{0i} and k_{0j}, but then they generate a subgroup isomorphic to $\mathcal{Q}$, or they should be k_{0i} and k_{j0} which do not verify the third defining relation of G (4, 4, 0, —1).

Also, there exists no subgroup isomorphic to $\mathcal{A}$, since the pairs (k_{oi}, k_{lm}) or (k_{jo}, k_{lm}) generate subgroups isomorphic to $\mathcal{D}_8$.

Finally by choosing the triples $\{k_{01}, k_{11}, k_{21}\}$ $\{k_{02}, k_{12}, k_{32}\}$, $\{k_{03}, k_{13}, k_{23}\}$, $\{k_{10}, k_{11}, k_{12}\}$, $\{k_{20}, k_{21}, k_{23}\}$ or $\{k_{30}, k_{31}, k_{32}\}$ we build the six distinct subgroups of order 16 isomorphic to $\mathcal{B}$. They are

$$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{10}, \pm k_{11}, \pm k_{20}, \pm k_{21}, \pm k_{30}, \pm k_{31}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{02}, \pm k_{10}, \pm k_{12}, \pm k_{20}, \pm k_{22}, \pm k_{30}, \pm k_{32}\}$$
$$\{\pm k_{00}, \pm k_{03}, \pm k_{10}, \pm k_{13}, \pm k_{20}, \pm k_{23}, \pm k_{30}, \pm k_{33}\}$$

$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{02}, \pm k_{03}, \pm k_{10}, \pm k_{11}, \pm k_{12}, \pm k_{13}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{02}, \pm k_{03}, \pm k_{20}, \pm k_{21}, \pm k_{22}, \pm k_{23}\}$
$\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{02}, \pm k_{03}, \pm k_{30}, \pm k_{31}, \pm k_{32}, \pm k_{33}\}$

(*vii*) It is easily seen that for any $a \in \mathcal{Q}_1$ and $b \in \mathcal{Q}_2$, $a\,b = a\,b$ and that for any $k_{ij} \in \mathcal{S}$, we have $k_{ij} = k_{i0} \times k_{0j}$. This fact was pointed out by G. Lemaître [12].

A. S. Eddington [6] [7] calls *antitetrads* in $\mathcal{S}$ the three quadratic subgroups $\{k_{00}, k_{11}, k_{22}, k_{33}\}$, $\{k_{00}, k_{12}, k_{23}, k_{31}\}$, $\{k_{00}, k_{13}, k_{21}, k_{32}\}$; he calls *triads* the two quaternionic subgroups.

Corollary 1. — *The group* $\mathcal{S}$ *is of length* 5

In fact S, $\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{10}, \pm k_{11}, \pm k_{20}, \pm k_{21}, \pm k_{30}, \pm k_{31}\}$, $\{\pm k_{00}, \pm k_{01}, \pm k_{10}, \pm k_{11}\}$, $\{\pm k_{00}, \pm k_{01}\}$, $\{\pm k_{00}\}$ and $\{\pm k_{00}\}$ form a Jordan-Hölder sequence of $\mathcal{S}$ such that the sequence of its quotient group is equivalent to the sequence $(C_2, C_2, C_2, C_2, C_2,)$.

Corollary 2. — (*i*) — k_{00} *commutes with every element of* $\mathcal{S}$.

(*ii*) *The elements of* $\mathcal{S}$ *which commute with each* k_{0i} $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *commute with* $-k_{0i}$ *and they generate a subgroup of* $\mathcal{S}$ *which is isomorphic to* $\mathcal{B}$. *The same is true for elements* k_{0i}.

(*iii*) *The elements of* $\mathcal{S}$ *which commute with* k_{ij} $(i, j \neq 0)$ *commute with* $-k_{ij}$ *and generate a subgroup of* $\mathcal{S}$ *which is isomorphic to* $\mathcal{D}_8 \times C_2$.

Corollary 3. — (*i*) *If the characteristic of* A $\neq 2$, *then for any* $x \in \Sigma$ (A; —1, —1, —1, —1),

$$qs\ (x) = \frac{1}{16} \sum_{0 \leqslant i,\ j \leqslant 3} (k_{ij})^2\ k_{ij}\ x\ k_{ij}.$$

(*ii*) *If* K *is a commutative field of characteristic* $\neq 2$, *then for any* $x \in \Sigma$ (K; —1, —1, —1, —1),

$$x_{lm} = \frac{1}{16} \sum_{0 \leqslant i,\ j \leqslant 3} (k_{lm})^2\ (k_{ij})^2\ k_{ij}\ k_{lm}\ x\ k_{ij}\ (0 \leqslant l, m \leqslant 3)$$

Proof. (*i*) is directly verified from Corollary 2 (*ii*) and (*iii*), as it is done by A. S. Eddington ([6], p. 25) in the particular case where A is the field C of complex numbers and the canonical base (k_{ij}) is replaced by the base (k'_{ij}), as it is defined in § 1.

(*ii*) From prop. 8, we obtain that, for any $x \in \Sigma(K; -1,-1,-1,-1)$, $x_{lm} = (k_{lm})^2\ qs\ (k_{lm}\, x)$. Using (*i*), we deduce the expression which is announced for x_{lm}.

PROPOSITION 11. — *Let* K *be an algebraically closed commutative field of characteristic* $\neq 2$. $\mathfrak{S}$ *can be generated by four elements* $(\Gamma_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant 4}$ *verifying the relations*

$$\frac{1}{2}(\Gamma_\mu\, \Gamma_\nu + \Gamma_\nu\, \Gamma_\mu) = \delta_{\mu\nu} \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant 4).$$

Proof. If -1 is a square in K, $\varkappa^2$ say, then it is easily seen that the elements $\Gamma_1 = k_{11}$, $\Gamma_2 = k_{21}$, $\Gamma_3 = k_{31}$ and $\Gamma_4 = \varkappa\, k_{02}$ form a system of generators of $\mathfrak{S}$ satisfying the relations above.

This proposition shows in the case, where K is the field **C** of complex numbers, that $\mathfrak{S}$ is isomorphic to the group defined by P. A. M. Dirac ([4], p. 255-256).

6. The algebra of the Dirac group

LEMMA. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$ *and let* Φ *be an algebra on* K *with a base* $(\pi_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3}$ *of* 16 *elements*: π_{00} *is the unit element of* Φ *which we identify to the unit element* 1 *of* K; *the* 16 *elements of the base are multiplied according to the following table*:

$$\pi_{ij}^2 = 1 \quad (0 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

$$\pi_{0i}\, \pi_{ji} = \pi_{ji}\, \pi_{0i} = \pi_{j0}\ ,\ \pi_{i0}\, \pi_{ij} = \pi_{ij}\, \pi_{i0} = \pi_{0j}\ ,\ \pi_{i0}\, \pi_{0j} = \pi_{0j}\, \pi_{i0} = \pi_{ij} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{0j}\, \pi_{il} = \pi_{il}\, \pi_{0j} = \pi_{im}\ ,\ \pi_{j0}\, \pi_{il} = \pi_{il}\, \pi_{0j} = \pi_{im} \\ \pi_{ji}\, \pi_{li} = \pi_{li}\, \pi_{ji} = \pi_{m0}\ ,\ \pi_{ij}\, \pi_{il} = \pi_{il}\, \pi_{ij} = \pi_{0m} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{for } 1 \leqslant i \leqslant 3 \textit{ and } (j, l, m) \\ \textit{being a permutation of } (1,2,3) \end{array}$$

$$\pi_{l\lambda}\, \pi_{m\mu} = \pi_{m\mu}\, \pi_{l\lambda} = \pi_{n\nu} \quad \textit{for } (l, m, n) \textit{ and } (\lambda, \mu, \nu) \textit{ being permutations of } 1, 2, 3.$$

Then the algebra Φ *is direct compound of* 16 *fields isomorphic to* K.

Proof. It is easily seen that Φ is isomorphic to the tensor product of two algebras Θ and Ψ over K such that both have a base of four elements.

If the base of Θ is $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, we have to suppose that θ_0 is the unit element of Θ, which we identify to $1 \in K$ and that the base

ctors are multiplied as follow

$$\theta_i^2 = 1 \qquad (0 \leqslant i \leqslant 3)$$

$\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i = \theta_k$ ((i, j, k) being a permutation of $(1, 2, 3)$).

In the same way, the base Ψ being $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ we have to suppose that φ_0 is the unit element of Ψ identified to $1 \in K$ and that we have the following multiplication table

$$\varphi_i^2 = 1 \qquad (0 \leqslant i \leqslant 3)$$

$\varphi_i\varphi_j = \varphi_j\varphi_i = \varphi_k$ ((i, j, k) being a permutation of $(1, 2, 3)$).

Then the mapping $\pi_{ij} \to \varphi_i \otimes \theta_j$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 3)$ is an algebra isomorphism of Φ onto $\Psi \otimes \Theta$.

But the algebra Θ, as well as Ψ, is the direct compound of four fields isomorphic to K. Thus Φ is the direct compound of 16 fields isomorphic to K.

Proposition 12. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$. *The algebra* $K^{[S]}$ *of the Dirac group with respect to* K *is the direct compound of* 16 *fields isomorphic to* K *and of the algebra* $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$.

Proof. The elements of S can be written $\{k_{ij}, \epsilon k_{ij} : 0 \leqslant i, j \leqslant 3\}$ where ϵ is the element of S corresponding to the sedenion $-k_{00}$. Then we consider the base of $K^{[S]}$ formed with the elements

$$\pi_{ij} = \frac{1}{2}(k_{00} + \epsilon)\, k_{ij} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(k_{00} - \epsilon)\, k_{ij} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

We have $\omega_{ij}\pi_{lm} = \pi_{lm}\omega_{ij} = 0$ $(0 \leqslant i, j, l, m \leqslant 3)$; the elements ω_{ij} have the same multiplication table as the base vectors of the sedenion algebra $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ and the elements π_{ij} have the same multiplication table as that of the algebra described in the lemma. Therefore $K^{[S]}$ is the direct compound of an algebra $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ and an algebra of the type described in the lemma.

From what we said at the beginning of § 4, we deduce from prop 9. the following.

Corollary. — *Let* K *be a commutative algebraically closed field of characteristic* $\neq 2$. *The algebra* $K^{[S]}$ *of the Dirac group* $\mathcal{S}$ *with respect to* K *is the direct compound of* 16 *fields isomorphic to* K *and of the algebra* $\mathbf{M}_4(K)$.

Proposition 13. — *The regular representation of the Dirac group* $\mathcal{S}$ *can be decomposed into seventeen irreducible linear representations over an algebraically closed commutative field* K *of characteristic* $\neq 2$; *sixteen are of degree* 1 *and one is of degree* 4.

Proof. Prop. 10 (*ii*) tells us that $\mathcal{S}$ can be decomposed into 17 irreducible linear representations over K. The coroll. of prop. 12 makes evident that 16 of these representations are of degree 1, whereas the last one is of degree 4.

In the case $K = \mathbf{C}$, A. Gamba [9] gives the values of the 17 characters of $\mathcal{S}$ for each of its conjugate classes; of course, his table can be transposed for the more general case of an algebraically closed field K of characteristic $\neq 2$, since these irreducible linear representations are altogether *absolutely* irreducible. Hence

Corollary. — *Let* K *be an algebraically closed commutative field of characteristic* $\neq 2$. *For any* $x \in \Sigma(K; -1, -1, -1, -1)$ *such that* $x = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} x_{ij}\, k_{ij}$,

$$sp\ (\dot{k}_{ij}\, \dot{x}) = 4\, qs\ (k_{ij}\, x) \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

where $\dot{k}_{ij}$ (*resp.* $\dot{x}$) *is the image of* k_{ij} (*resp.* x) *in the isomorphism* $\Sigma(K; -1, -1, -1, -1) \to \mathbf{M}_4(K)$ *and sp is the trace form on* $\mathbf{M}_4(K)$.

In fact $sp(\dot{x}) = \sum_{0 \leqslant i\, j \leqslant 3} x_{ij}\, sp\ (\dot{k}_{ij}) = 4\, x_{00} = 4\, qs\ (x)$; therefore

$$x_{ij} = k_{ij}^2\ qs\ (k_{ij}\, x) = \frac{1}{4}\, k_{ij}^2\ sp\ (\dot{k}_{ij}\, \dot{x}) \text{ for } 0 \leqslant i, j \leqslant 3.$$

7. Generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ as the first Clifford algebra over a four-dimensional metric vector space

Let K be a commutative field of characteristic $\neq 2$.

Assume that E is a vector space over K of finite dimension n. On E we consider the bilinear form $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ which we suppose

be *symmetric*, i.e. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ for all x and $y \in E$ and *on-degenerate*, i.e. the relation $\langle x, y\rangle = 0$ for all $x \in E$ implies $= 0$. If $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ is a base of E, then $x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi^i e_i$ and $x, x\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} g_{ij}\, \xi^i\, \xi^j$ where $g_{ij} = \langle e^i, e_j\rangle$ for $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

f course $g_{ij} = g_{ji}$ and since the characteristic of K $\neq 2$, we can noose the base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ such that it is *orthogonal*, i.e. $g_{ij} = 0$ for $\neq j$. We call E a *metric vector space* on K and the quadratic form $\to \langle x, x\rangle$ a *metric fundamental form on* E.

In the tensor algebra T (E) over E, we consider the two-sided leal $\mathfrak{A}$ generated by the elements $x \otimes y + y \otimes x - 2\langle x, y\rangle$. he quotient algebra $C(E) = T(E)/\mathfrak{A}$ is the *first Clifford algebra* f the metric fundamental form over E.

C.Chevalley [3] proved that it is of dimension 2^n. Let a_i represent ne class of e_i modulo $\mathfrak{A}$ in C(E); for every subset H of the interval $, n] \subset \mathbf{N}$, let us put $a_H = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_p}$ where $i_1, i_2, \ldots, i_p$ are all ne elements of H in such an order that $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$; we make lso the convention that $a_H = 1 \in K$ if $H = o$. The vector space E is omorphic to the linear extension A in C(E) of the family $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$; ence by an *abus de langage*, we identify E and A, e_i and a_i for $\leqslant i \leqslant n$.

Among other properties established by C. Chevalley [3], we retain ne following isomorphism which proves to be useful in the inter- retation of A. S. Eddington's *Fundamental Theory*.

Let $\overset{p}{\wedge} E$ represent the p-th exterior power of E; the convention made that $\overset{p}{\wedge} E = \{0\}$ for $p > n$ and $p < 0$, whereas $\overset{0}{\wedge} E = K$ nd $\overset{1}{\wedge} E = E$. $\wedge E$ is the exterior algebra over E, i.e. the vector pace which is the direct sum of the vector spaces $\overset{p}{\wedge} E$ and on which ne exterior product of a p-vector by a q-vector determines a struc- ure of algebra. For any $x \in \wedge E$, we have $x = \sum_{p \in \mathbf{Z}} x_p$ with $x_p \in \overset{p}{\wedge} E$.

We consider the involutive automorphism J of the algebra struc- ure of $\wedge E$ such that $x \to x^J = \sum_{p \in \mathbf{Z}} (-1)^p x_p$. Then to every $x \in E$, e associate the mapping δ_x of $\wedge E$ into itself verifying the following onditions

(*i*) $\delta_x (y + z) = \delta_x (y) + \delta_x (z)$.

(*ii*) $\delta_x(\alpha y) = \alpha\, \delta_x(y)$

(*iii*) $\delta_x(y \wedge z) = (\delta_x(y) \wedge z) + (y^J \wedge \delta_x(z))$

(*iv*) $\delta_x(t) = \langle x, t \rangle$

for all $y, z \in \wedge E$, $t \in E$ and $\alpha \in K$.

δ_x is called an *antiderivation* associated to the metric fundamental form. It can be proved that $x \to \delta_x$ is a monomorphism of the vector space E into the vector space of the endomorphisms of the vector space structure of $\wedge E$; $\delta_x^2 = 0$; $\delta_x(1) = 0$ and for any $y \in \overset{p}{\wedge} E$, $\delta_x(y) \in \overset{p-1}{\wedge} E$.

On the other side, to every $x \in E$, we associate the mapping L_x of $\wedge E$ into itself: $L_x(y) = x \wedge y$ for all $y \in \wedge E$. L_x is also an endomorphism of the vector space structure of $\wedge E$ and the mapping $x \to L_x$ is a monomorphism of the vector space E into the vector space structure of $\wedge E$. $L_x^2 = 0$; $L_x(1) = x$ and for any $y \in \overset{p}{\wedge} E$, $L_x(y) \in \overset{p-1}{\wedge} E$.

Finally in C (E), we represent by $C_m(E)$ the linear extension of the base elements e_H where H is a subset of $[1, n]$ having at most m elements.

C. Chevalley [3] proves that there exists a 1-1 mapping of the set C (E) onto the set $\wedge E$ satisfying the following conditions :

(*i*) it is an isomorphism of the vector space structure of C (E) onto the vector space structure of $\wedge E$,

(*ii*) to the operation of multiplying to the left by $x \in E$ in C (E) corresponds the operation $L_x + \delta_x$ in $\wedge E$, (*)

(*iii*) for $0 \leqslant m \leqslant n$, this isomorphism induces on $C_m(E)$ an isomorphism of the vector space structure onto the vector space structure of $\sum_{0 \leqslant p \leqslant m} \overset{p}{\wedge} E$ (the sign of summation is understood as a direct sum).

(*iv*) for $2 \leqslant m \leqslant n$ and $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in E$, $x_1 x_2 \ldots x_m \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$ (mod. $C_{m-2}(E)$).

Theorem 2. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$.

(*) This particular feature of the isomorphism $C(E) \to \wedge E$ was pointed out by A. S. Eddington ([6], p. 58).

The first Clifford algebra C (E) *of a metric fundamental form over a four-dimensional metric vector space* E *on* K *is a generalised sedenion algebra over* K. *Conversely, to any generalised sedenion algebra* Σ (K; α, β, γ, δ) *over* K, *one can associate a four-dimensional metric vector space* E *such that* Σ (K; α, β, γ, δ) *is isomorphic to the first Clifford algebra* C (E).

Proof. — An easy computation based on the two equalities $e_i e_j = -e_j e_i$ for $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$ and $e_i^2 = g_{ii}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ shows that the linear extension of $(1, e_1, e_2, e_1 e_2)$ is the generalised quaternion algebra Ω (K; g_{11}, g_{22}), whereas the linear extension of $(1, e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_3 e_4)$ is the generalised quaternion algebra Ω (K; $-g_{11}g_{22}g_{33}$, $-g_{11}g_{22}g_{44}$); finally it is easily seen that C (E) $= \Omega$ (K; g_{11}, g_{22}) $\otimes$ Ω (K; $-g_{11}\,g_{22}\,g_{33}$, $-g_{11}\,g_{22}\,g_{44}$).

Another selection of base elements of C (E) might yield a generalised sedenion algebra with respect to another quadruple of elements of K and we ought to use the elementary transformations set up by prop. 1 in order to produce the isomorphism from one sedenion algebra to the other one.

Conversely, given the generalised sedenion algebra Σ (K; α, β, γ, δ) we consider on the four-dimensional vector space $E = K^4$ the bilinear symmetric form defined by $g_{11} = \alpha$, $g_{22} = \beta$, $g_{33} = -\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$, $g_{44} = -\dfrac{\delta}{\alpha\beta}$, $g_{ij} = 0$ for $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$. This bilinear form is non degenerate since $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$ and defines a metric fundamental form on E. Then obviously C (E) is isomorphic to Σ (K; α, β, γ, δ).

The isomorphism C (E) $\rightarrow$ Σ (K; α, β, γ, δ) as it is set up by the first part of the proof of th. 2 and the isomorphism C (E) $\rightarrow \Lambda$ E established by C. Chevalley allows us to divide the canonical base $(k_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3}$ of Σ (K; α, β, γ, δ) into five classes: k_{00} is the unique base element of the vector space $\overset{0}{\Lambda}$ E of 0-vectors; k_{10}, k_{20}, k_{31}, k_{23} form a base of the vector space $\overset{1}{\Lambda}$ E ($\cong$ E) of 1-vectors; k_{30}, k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{03}, k_{33} is a base of the vector space $\overset{2}{\Lambda}$ E of the 2-vectors, whereas k_{01}, k_{02}, k_{32}, k_{13} is a base of the vector space $\overset{3}{\Lambda}$ E of the 3-vectors and finally k_{22} is a base element of the one-dimensional vector-space $\overset{4}{\Lambda}$ E of the 4-vectors.

For A. S. Eddington ([7], p. 113), th. 2 brings the sedenion algebra

Σ (C; —1, —1, —1, —1) into Physics by suggesting to identify the metric vector space E with the observational space-time.

8. Generalised sedenion algebra Σ (K; α, β, γ, δ) as the second Clifford algebra over a five-dimensional metric vector space

As in section 7, we assume that K is a commutative field of characteristic $\neq 2$ and that E is a n-dimensional metric vector space for the metric fundamental form $x \to \langle x, x \rangle$.

E^p representing the p-th tensor power of E, we denote by $T_+(E)$ the vector space which is the direct sum of the tensor powers $(E^{2h})_{h \in N}$ of E; it is a subalgebra of the tensor algebra T(E): $T_+(E)$ $T_+(E)$ $\subset T_+(E)$. Thus $T_+(E) \cap \mathfrak{A}$ is a two-sided ideal of $T_+(E)$ and the quotient algebra $C_+(E) = T_+(E)/T_+(E) \cap \mathfrak{A}$ is the second Clifford algebra of the metric fundamental form over E. Obviously $C_+(E) \subset C(E)$.

C. Chevalley [3] proves that dim $C_+(E) = 2^{n-1}$; the elements e_H, where H is a subset of the interval $[1, n]$, containing an even number of elements, can be choosen as one of its base.

If we represent by $\Lambda_+(E)$ the direct sum of the even exterior powers of E, then the vector space isomorphism of C (E)onto Λ E induces a vector space isomorphism of $C_+(E)$ onto $\Lambda_+(E)$.

Proposition 14. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$. *The second Clifford algebra* $C_+(E)$ *of the metric fundamental form over a five-dimensional metric vector space* E *on* K *is a generalised sedenion algebra over* K. *Conversely, to any generalised sedenion algebra* Σ (K; α, β, γ, δ) *over* K, *one can associate a five-dimensional metric vector space* E *such that* Σ (K; α, β, γ, δ) *is isomorphic to the second Clifford algebra* $C_+(E)$.

Proof. — M. Eichler ([8], (5.18), p. 33) has shown that $C_+(E)$ is isomorphic to Ω (K; $-g_{11}\, g_{22}$, $-g_{11}\, g_{33}$) $\otimes$ Ω (K; $g_{11}\, g_{22}\, g_{33}\, g_{44}$; $g_{11}g_{22}g_{33}g_{55}$) where the first generalised quaternion algebra is generated by $(1, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1)$ and the second by $(1, e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_4e_5)$.

Conversely, given the generalised sedenion algebra Σ (K; α,β,γ,δ), we consider on the five-dimensional vector space $E = K^5$ the bilinear symmetric form defined by $g_{11} = \alpha$, $g_{22} = -1$, $g_{33} = \beta$, $g_{44} = -\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$,

$_5 = -\frac{\delta}{\alpha\beta}$. Obviously this metric fundamental form is non-
egenerate and its second Clifford algebra is isomorphic to
$(K; \alpha,\beta,\gamma,\delta)$.

By means of the isomorphism $C_+(E) \to \Sigma(K; \alpha,\beta,\gamma,\delta)$ and of the
omorphism $C_+(E) \to \Lambda_+(E)$ we can assign to the elements of the
nonical base $(k_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3}$ of $\Sigma(K; \alpha,\beta,\gamma,\delta)$ their appropriate tensor
haracter. Let us put $E_0 = 1$, $E_1 = e_1e_2$, $E_2 = e_2e_3$, $E_3 = -g_{22}e_1e_3$,
$_0 = 1$, $F_1 = e_1e_2e_3e_4$, $F_2 = e_1e_2e_3e_5$, $F_3 = g_{11}g_{22}g_{33}e_4e_5$; thus $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$
esp. $(F_j)_{0 \leqslant j \leqslant 3}$ form a canonical base of $\Omega(K; -g_{11}g_{22}, -g_{22}g_{33})$
esp. $\Omega(K; g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}, g_{11}g_{22}g_{33}g_{55})$) and consequently $k_{ij} = E_i \otimes F_j$.
is then obvious that k_{00} is a 0-vector, that k_{10}, k_{20}, k_{30}, k_{11}, k_{12},
$_{21}$, k_{22}, k_{31}, k_{32}, k_{03}, form a base of the vector space $\overset{2}{\Lambda} E$ of the
-vectors, whereas k_{01}, k_{02}, k_{13}, k_{23}, k_{33} is a base of the vector space
E.

Since $\overset{4}{\Lambda} E$ and E are vector-space isomorphic, we may also call
ectors the last five base elements and we have therefore justified
ne tensor characterisation which A. S. Eddington ([6], § 4.3, p. 53-55;
], § 57, p. 114-116) lays at the foundation of his Five-Dimensional
heory.

A. S. Eddington calls *pentad* the base k_{01}, k_{02}, k_{13}, k_{23}, k_{33} of $\overset{4}{\Lambda} E$.
he choice of the indices (1, 2, 3) for the canonical base is quite
nmaterial; also we can interchange the notation E and F for the
ases of the two generalised quaternion algebras; hence we get six
ifferent pentads

$$(k_{01}, k_{02}, k_{13}, k_{23}, k_{33})$$
$$(k_{02}, k_{03}, k_{11}, k_{21}, k_{31})$$
$$(k_{03}, k_{01}, k_{12}, k_{22}, k_{32})$$
$$(k_{10}, k_{20}, k_{31}, k_{32}, k_{33})$$
$$(k_{20}, k_{30}, k_{11}, k_{12}, k_{13})$$
$$(k_{30}, k_{10}, k_{21}, k_{22}, k_{23})$$

G. Lemaître ([12], p. 170) pointed out that the 6 pentads are
btained by multiplying the six base elements k_{01}, k_{02}, k_{03}, k_{10}, k_{20}, k_{30}
y one of them.

9. Generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ as the subalgebra $C_2(E) \cap \bigcap_{\cup} C_1(E)$ of the first Clifford algebra over a six-dimensional metric vector space

Let E be a six-dimensional metric vector space and let $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ be an orthogonal base of E. g represents the scalar $\prod_{1 \leqslant i \leqslant 6} g_{ii}$ and $\eta^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} g^{-\frac{1}{2}}$ where $\varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}$ is ± 1, according to whether the number of permutations of the sequence $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ is even or odd. Then the mapping of $\overset{2}{\wedge} E$ into $\overset{4}{\wedge} E$ defined by $e_{i_5} \wedge e_{i_6} \to \frac{1}{2!} \eta^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} e_{i_5} \wedge e_{i_6}$ is an isomorphism of the vector space structure of $\overset{2}{\wedge} E$ onto $\overset{4}{\wedge} E$. (cfr [13], p. 73-74). If, by an *abus de langage*, we identify accordingly $\overset{2}{\wedge} E$ and $\overset{4}{\wedge} E$, then the exterior product on $\wedge E$ induces on $\overset{0}{\wedge} E + \overset{2}{\wedge} E$ a structure of algebra over K; clearly $\dim (\overset{0}{\wedge} E + \overset{2}{\wedge} E) = 16$.

Since the base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ is orthogonal, by virtue of the isomorphism $C(E) \to \wedge E$ established by C. Chevalley [3],

$$e_i e_j e_k e_l = \frac{1}{3!} e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l \quad \text{for} \quad 1 \leqslant i < j < k < l \leqslant 6$$

and therefore from what we said, we can identify the linear extension of the elements $e_i e_j e_k e_l$ with the linear extension of the elements $e_i e_j$. Hence the set $C_2(E) \cap \bigcap_{\cup} C_1(E)$ is, by means of this *abus de langage*, a subalgebra of the Clifford algebra C(E) of the metric fundamental form.

Proposition 15. — *Let* K *be a commutative field of characteristic* $\neq 2$. *The subalgebra* $C_2(E) \cap \bigcap_{\cup} C_1(E)$ *of the metric fundamental form over a six-dimensional metric vector space* E *on* K *is a generalised sedenion algebra over* K. *Conversely, to any generalised sedenion algebra* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *over* K, *one can associate a six-dimensional metric vector space* E *such that* $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *is isomorphic to the subalgebra* $C_2(E) \cap \bigcap_{\cup} C_1(E)$ *of its first Clifford algebra* C(E).

Proof. — An easy computation based on the same equalities as in the proof of th. 2 (§ 7) shows that the linear extension of $(1, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3)$ is the generalised quaternion algebra $\Omega(K; -g_{11}g_{22}, -g_{11}g_{33})$, while the linear extension of $(1, e_4e_5, e_4e_6, e_5e_6)$ is the generalised quaternion algebra $\Omega(K; -g_{44}g_{55}, g_{44}g_{66})$. Therefrom, by using the foresaid isomorphism of $\overset{4}{\Lambda} E$ and $\overset{2}{\Lambda} E$, it is easily shown that $C_2(E) \cap \left[\bigcup\right] C_1(E)$ is isomorphic to the algebra $\Omega(K; -g_{11}g_{22}, -g_{11}g_{32}) \otimes \Omega(K; -g_{44}g_{55}, g_{44}g_{66})$.

Conversely, given the generalised sedenion algebra $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, we build on the six-dimensional vector space $E = K^6$ the bilinear symmetric form defined by $g_{11} = -1$, $g_{22} = \alpha$, $g_{33} = \beta$, $g_{44} = -1$, $g_{55} = \gamma$, $g_{66} = \delta$, which is evidently non-degenerate, since $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ and $\delta \neq 0$. Once again identifying $\overset{2}{\Lambda} E$ and $\overset{4}{\Lambda} E$ and using the isomorphism $\Lambda E \to C(E)$ established by C. Chevalley, we can show that $\Sigma(K; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is isomorphic to $C_2(E) \cap \left[\bigcup\right] C_1(E)$.

Prop. 15 justifies how A. S. Eddington ([7], p. 115) requires a 6-dimensional representation of the E-numbers.

Conclusion. If we treat sedenion algebras not only on the field C of complex numbers, but on the most general fields and eventually on a commutative ring with a unit element, it is to emphasize the following principle which we reach at the end of this *purely algebraic* study: A. S. Eddington's Fundamental Theory introduces itself as unifying the concepts of relativity theory on one side and those of atomic physics on the other side, because it is built on the algebraic frame of the E-numbers which is on one side isomorphic to the irreducible representation of order 4 of the algebra of the Dirac group and on the other side to the Clifford algebra of a four-dimensional metric vector space.

In another contribution, we hope to show how in A. S. Eddington's conception the th. 1 of § 4 justifies the «relativistic» meaning of Dirac's wave equation and of the relativity theory as well.

REFERENCES

[1] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire*, A.S.I. **1032**, Paris 1947.
[2] N. Bourbaki, *Algèbre multilinéaire*, A.S.I. **1044**, Paris 1948.
[3] C. Chevalley, *The algebraic Theory of Spinors*, New York 1954.
[4] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1947.
[5] A. S. Eddington, *Proc. Roy. Soc.* (A) **121** (1928), 524-542.
[6] A. S. Eddington, *Relativity Theory of Protons and Electrons*, Cambridge 1936.
[7] A. S. Eddington, *Fundamental Theory*, Cambridge 1949.
[8] M. Eichler, *Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen*, Berlin 1952.
[9] A. Gamba, *La Revue Scientifique*, **90** (1952), 11-24.
[10] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, London 1899.
[11] C. W. Kilmister, *Proc. Roy. Soc.* (A) **199** (1949), 517-532.
[12] G. Lemaitre, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, **57** (1937), 165-172.
[13] A. Lichnerowicz, *Eléments de calcul tensoriel*, Collection Armand Colin **259**, Paris 1955.
[14] W. H. McCrea, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **35** (1939), 123-125.
[15] W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6** (1936), 109.
[16] G. Temple, *Proc. Roy. Soc.* (A) **127** (1930), 342-348.
[17] J. W. A. Young, *Amer. Journ. Math.* **15** (1893), 124-190.
[18] H. Weyl, *The classical Groups*, Princeton 1946.

A note on a theorem of F.C. Hsiang

BY

S. D. SINVHAL

. Introduction:

Let $f(x)$ be periodic with period 2π and Lebesgue integrable in $0,2\pi)$ and let

$$f(x) \sim 1/2\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

be the Fourier series of $f(x)$. We shall put

$$\Phi(t) \equiv \Phi_x(t) = 1/2\, [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)],$$

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \Phi(u)\, du, \tag{1.2}$$

$$\chi_\eta(t) = \int_0^t \frac{\Phi(u)}{u^{1+\eta}}\, du, \quad \eta \geqslant 0$$

$$\chi(t) = \chi_0(t).$$

It was proved by Prasad [2] that the convergence of the integral $\chi(t)$ is not sufficient for the (C, 1)-summability of the series (1.1) at a point x. As a development of this result Hsiang [1] has given an example to demonstrate that «the convergence of the integral $\chi_\eta(t)$ is not sufficient for the Fourier series at a point x to be summable (C, 1-ε) if $\varepsilon > \{\eta/(1+\eta)\}$.» He has also given a demonstration to establish that «the condition implies, however, the summability — (C, 1) of the Fourier series at the point x.»

To prove his first mentioned result Hsiang constructs an example of a function for which the integral $\chi_\eta(t)$ converges but for which the sequence of Cesaro means of order 1-ε($\varepsilon = \eta/+\eta$), taken through a certain sequence n_ν, diverges to infinity. The object of this note is to show that Hsiang's demonstration is inaccurate in as much as

it can be shown that the *the partial sums of the Fourier series of the same function taken through the same sequence are bounded.* It appears that formula (19) on p. 46 of Hsiang's paper, which we reproduce as (2.1) below, is incorrect.

2. Hsiang's demonstration:

If σ_n^r denote the *n-th* Cesaro mean of order r of the Fourier series of $f(x)$, Hsiang has derived that the usual formula for the expression $[\sigma_n^r(x) - f(x)]$ can be put in the more operative form

$$[\sigma_n^{(1-\varepsilon)}(x) - f(x)] = A\, n^{\varepsilon} \int_{1/n}^{\pi} \Phi_1(t)\, t^{\varepsilon-2} \cos nt\, dt + B\, n^{\varepsilon} \int_{1/n}^{\pi} (t)\, \Phi_1\, t^{\varepsilon-2} \sin nt\, dt + o(1) \qquad (2.1)$$

where A and B are constants. He next defines a function $F(t)$ as:

$$F(t) = c_\nu \sin n_\nu t;\ \pi n_\nu^{-1/k} \leqslant t \leqslant \pi n_{\nu-1}^{-1/k}\ ,\ \nu = 2,3,4,\ldots$$

$$F(0) = 0,$$

where,

$$c_\nu = \nu^{-3/2},$$

$$n_\nu = [\nu\,!]^k,$$

$K = s(p+q)$, s, p, q being positive integers,

$k = (\varepsilon + n)/\varepsilon$, $\eta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$,

$\varepsilon = \eta\,(p/q)$, (p/q)being a rational number such that

$$1/(1+\eta) < p/q < \varepsilon/\eta < 1$$

and since $t^{1+\eta} F(t)$ is absolutely continuous, he puts

$$\Phi_1(t) = t^{1+\eta} F(t) \qquad (2.3)$$

and shows that for the function $f(x)$ for which $\Phi_1(t)$ has the form (2.3), the right hand side of (2.1) diverges numerically to infinity as n tends to infinity through the sequence n_ν. That the above demonstration is incorrect is shown below.

3. Counter result:

The elements $a_{n,i}$ of the matrix for (C, r)-summability are defined as

$$a_{n,i} = \frac{A_i^{r-1}}{A_n^r}, \quad i = 0,1,2,3,\ldots, \quad n; \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

where

$$A_i^\beta = \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(\beta+1)}$$

$$\simeq \frac{i^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \quad \beta \neq -1, -2, -3,\ldots$$

Further, since A_i^β is positive for $\beta > -1$, it is easy to see that the matrix for (C, r)-summability is positive for $r > 0$ (i.e., all the $a_{n,i}$ are non-negative). For such matrices the following theorem is well known (see Zygmund, [3]):

$$\underline{\lim}\, s_{n_\nu} \leqslant \underline{\lim}\, \sigma^r_{n_\nu} \leqslant \overline{\lim}\, \sigma^r_{n_\nu} \leqslant \overline{\lim}\, s_{n_\nu}, \quad r > 0 \tag{3.1}$$

where s_{n_ν} is the n_ν-*th* partial sum of the given series. We shall, therefore, have established the inaccuracy of Hsiang's demonstration if we show that the partial sums of the Fourier series of $f(x)$, with exponents for which Hsiang has established the divergence to infinity of the (C, 1-ε)-sum,are bounded.

Since

$$\Phi_1(t) = c_\nu\, t^{1+\eta} \sin n_\nu t, \quad \pi n_\nu^{-1/k} \leqslant t \leqslant \pi n_{\nu-1}^{-1/k}, \tag{3.2}$$

we have, on differentiating,

$$\Phi_1'(t) \equiv \Phi(t) = (1+\eta)\, t^\eta\, c_\nu \sin n_\nu t + c_\nu n_\nu t^{1+\eta} \cos n_\nu t,$$
$$\pi n_\nu^{-1/k} \leqslant t \leqslant \pi n_{\nu-1}^{-1/k}, \quad \nu = 2,3,4,\ldots \tag{3.3}$$

and hence, putting $t_\nu = \pi n\, n_\nu^{-1/k}$, we get,

$$|s_{n_\nu}(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(t)\, \frac{\sin n_\nu t}{t}\, dt, \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{\mu=2}^{\infty} \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} \{c_\mu(1+\eta)\, t^\eta \sin n_\mu t + c_\mu n_\mu t^{1+\eta} \cos n_\mu t\} \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin n_\nu t}{t}\, dt \right|,$$

$$\leqslant \frac{1+\eta}{\pi} \sum_{\mu=2}^{\infty} \left| c_\mu \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} t^{\eta-1} \sin n_\mu t \sin n_\nu t \, dt \right|$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=2}^{\infty} \left| \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} c_\mu n_\mu t^\eta \cos n_\mu t \sin n_\nu t \, dt \right|,$$

$$\leqslant \frac{1+\eta}{\pi} \left[\sum_{\mu=2}^{\infty} c_\mu \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} t^{\eta-1} \, dt \right]$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{\infty} c_\mu n_\mu \left| \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} t^\eta \cos n_\mu t \sin n_\nu t \, dt \right|. \qquad (3.4)$$

The first of the above sums is

$$\leqslant \frac{1+\eta}{\eta\pi} \left[\sum_{\mu=2}^{\infty} 4 \{ c_\mu (n_{\mu-1}^{-\eta/k} - n_\mu^{-\eta/k}) \} \right],$$

$$= O \left[\sum_{\mu=2}^{\infty} c_\mu \right],$$

$$= O \left[\sum_{\mu=2}^{\infty} \mu^{-3/2} \right],$$

$$= O(1); \qquad (3.5)$$

and the second sum is

$$\leqslant \sum_{\mu=2}^{\nu-1} c_\mu n_\mu \left| \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} t^\eta \cos n_\mu t \, . \, \sin n_\nu t \, dt \right|$$

$$+ \frac{c_\nu n_\nu}{2} \left| \int_{t_\nu}^{t_{\nu-1}} t^\eta \sin 2 n_\nu t \, dt \right|$$

$$+ \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} c_\mu n_\mu \left| \int_{t_\mu}^{t_{\mu-1}} t^\eta \cos n_\mu t \, . \, \sin n_\nu t \, dt \right|,$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \text{ say,} \qquad (3.6)$$

where,

$$I_1 = \sum_{\mu=2}^{\nu-1} 1/2 \, c_\mu n_\mu \left| t_\eta^{\mu-1} \int_{t\mu}^{r\mu} \{ \sin(n_\nu + n_\mu)t + \sin(n_\nu - n_\mu) t \} \right| dt,$$

$$t_\mu \leqslant r_\mu \leqslant t_{\mu-1},$$

$$\leqslant \sum_{\mu=2}^{\nu-1} 4c_\mu n_\mu \left| n_{\mu-1}^{-\eta/k} \left\{ \frac{1}{n_\nu + n_\mu} + \frac{1}{n_\nu - n_\mu} \right\} \right| ,$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\nu-1} 8c_\mu n_\mu n_{\mu-1} \cdot \frac{n_\nu}{n_\nu^2 - n_\mu^2} \tag{3.7}$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\nu-1} \frac{8 c_\mu n_\mu n_{\mu-1}^{-\eta/k}}{n_\nu} \cdot \frac{1}{1 - (n_\mu/n_\nu)^2} ;$$

since $n_\mu/n_\nu \leqslant \nu^{-k} < 2^{-k}$, for $\mu \leqslant \nu - 1$, the above sum is

$$\leqslant \frac{2^{-k}}{1 - 2^{-2k}} \sum_{\mu=2}^{\infty} 8c_\mu n_{\mu-1}^{-\eta/k} ,$$

$$= O(1); \tag{3.8}$$

Next,

$$I_2 = \frac{c_\nu n_\nu}{2} \left| t_{\nu-1}^{\eta} \int_{t_\nu}^{r_\nu} \sin 2 n_\nu t \, dt \right| , \quad t_\nu \leqslant r_\nu \leqslant t_{\nu-1},$$

$$= O \left[c_\nu \cdot n_\nu \cdot n_{\nu-1}^{-\eta/k} \cdot \frac{1}{n_\nu} \right] ,$$

$$= O [c_\nu],$$

$$= o(1); \tag{3.9}$$

and in a manner similar to (3.7) we can show that

$$I_3 \leqslant \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} 2 c_\mu n_\mu n_{\mu-1}^{-\eta/k} \cdot \frac{n_\mu}{n_\mu^2 - n_\nu^2} ,$$

$$= O \left[\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} 2 c_\mu \cdot n_{\mu-1}^{-\eta/k} \cdot \frac{1}{1 - n_\nu^2/n_\mu^2} \right] ,$$

$$= O \left[\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} 2 c_\mu n_{\mu-1}^{-\eta/k} \cdot \frac{1}{1 - 1/(\nu+1)^{2k}} \right]$$

since $\dfrac{n_\nu}{n_\mu} \leqslant [1/(\nu+1)]^k$ for $\mu \geqslant \nu + 1$,

$$= O \left[\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} c_\mu \right] ,$$

$$= o(1). \tag{3.10}$$

It follows from results (3.4) to (3.10) that

$$|s_{n_\nu}(x) - f(x)| = O(1)$$

and hence in view of (3.1), $\sigma^r_{n_\nu}$ must also be bounded for all $r > 0$. This proves our assertion.

REFERENCES

[1] Hsiang, F. C., The summability (C, 1-ε) of Fourier series, *Duke Mathematical Journal*, XIII, 1946, p. 43-50.

[2] Prasad, B. N., On the summability (C, 1) of Fourier series, *Math. Zeit.*, XL, 1935, p. 496-502.

[3] Zygmund, A., *Trigonometrical Series*, 1952, p. 41.

Government Astronomical Observatory,
Banaras 2, India.

Deuxième Section

Sciences Physiques et Chimiques

Modèle atmosphérique

PAR

O. GODART

La prédiction du temps par calcul numérique ne peut se faire que pour s modèles atmosphériques simplifiés. Celui proposé suppose que la conver- nce isobarique est toujours nulle au niveau isobarique de 500 millibars. ı outre, certaines quantités relativement petites liées au mouvement vertical à l'aplatissement de la terre sont négligées.

Les coordonnées spatiales choisies sont : les deux premières, les coordonnées rtésiennes sur la projection stéréographique de la surface terre et la troisième hauteur au-dessus du niveau des mers d'une atmosphère adiabatique de férence ayant la même pression que l'atmosphère réelle.

Le champ des vitesses est complètement déterminé au moyen de deux tentiels : l'un de flux, l'autre de développement que l'on peut calculer en tégrant des équations linéaires aux dérivées partielles elliptiques du second dre, à partir des observations des hauteurs et températures des surfaces bares. La prédiction se fait par l'intégration d'une équation de Poisson d'équations linéaires paraboliques du premier et du second ordre.

1. Les simplifications apportées à la dynamique atmosphérique ur obtenir une solution numérique de ces équations dans des délais atiques, ont restreint la validité des solutions obtenues à des périodes lativement courtes (de l'ordre de 24 heures).

Généralement, l'accélération relative à la terre est négligée ou nplacée par une approximation grossière. Elle provoque néanmoins s modifications appréciables de la situation météorologique après délai d'un jour et même moindre dans certains cas. Cependant, mme l'a montré le travail remarquable de Richardson [1], tenir mpte de tous les phénomènes atmosphériques entraîne une telle mplexité que même si leur détermination était disponible avec la

précision et la fréquence nécessaires, une telle étude restera vraisemblablement une impossibilité pratique.

Il conviendra donc toujours d'introduire un modèle simplifié de l'atmosphère terrestre. Le but de ce travail est de définir un tel modèle où il est mieux tenu compte des accélérations et de la courbure de la terre, et dont la solution est déterminable numériquement dans un délai raisonnable, mais peut-être trop long pour l'exploitation pratique. On pourra ainsi se rendre compte de l'importance des quantités généralement négligées dans la pratique actuelle.

Nous nous restreindrons aux problèmes météorologiques à grande échelle. Il est en fait pratiquement impossible de connaître avec précision des perturbations de la dimension du réseau des postes d'observation. D'autre part, de telles perturbations conservent un caractère local; les procédés numériques généralement les amplifient contrairement à la réalité physique et introduisent des ondes parasites gênantes.

L'élimination de ce qu'on peut appeler la turbulence à échelle moyenne introduit un nouvel élément d'incertitude dans les conditions initiales partiellement surmontées par l'expérience du météorologiste analysant les données de base.

Les mesures du vent, en particulier, sont sujettes à de fortes fluctuations turbulentes et si elles sont utiles qualitativement pour les analyses, elles peuvent difficilement être utilisées quantitativement. Aussi pour les latitudes moyennes et élevées où cela est possible, il est préférable de déterminer indirectement les vitesses.

De même, la distribution complexe et éminemment variable de l'eau sous ses trois phases gazeuse, liquide et solide dans l'atmosphère, ne peut être connue qu'imparfaitement. Comme il ne semble pas que les chaleurs latentes jouent comme telles un rôle fondamental dans les questions d'énergie à grande échelle, nous supposerons donc l'atmosphère formée d'un gaz homogène non saturé de vapeur d'eau et dont la constante des gaz R sera, par conséquent, très voisine de celle du mélange en proportion constante des gaz permanents de l'atmosphère. L'équation d'état s'écrira

$$p = R \rho T \qquad (1$$

où p est la pression, T la température et ρ la masse spécifique.

Considérons une particule d'air d'unité de masse, avec un choix convenable d'unités, la première équation de la thermodynamique s'écrit

$$dQ = c_p \, dT - \frac{dp}{\rho} \qquad (2$$

ı dQ est l'énergie extérieure et c_p la chaleur spécifique à pression nstante.

Equations de mouvement

Soient les coordonnées sphériques : r distance du centre de la rre, φ latitude géocentrique, λ longitude et les vitesses correspon-ıntes dr/dt, $v = r\,d\varphi/dt$ et $u = r\cos\varphi\,d\lambda/dt$

Les forces extérieures principales sont par unité de masse : la force : la pression $-\nabla p/\rho$, la force de la gravité avec le terme d'accélé-

tion centrifuge $-\nabla\,\Phi$, où Φ est le géopotentiel et la force F due la friction et la turbulence.

Suivant Brunt [2] les équations de mouvement rapportées à la terre ı rotation sont :

$$\frac{}{}+\frac{dr}{dt}\,\frac{u}{r}-\frac{uv}{r}\tan\varphi+2\,\omega\left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi-v\sin\varphi\right)=$$

$$-\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}-\frac{1}{\rho\cos\varphi}\,\frac{\partial p}{\partial\lambda}+F_\lambda \qquad (3)$$

$$\frac{}{}+\frac{dr}{dt}\,\frac{v}{r}+\frac{u^2}{r}\tan\varphi+2\,\omega\,u\sin\varphi=-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}+F_\varphi \qquad (4)$$

$$\frac{}{}-\left(\frac{u^2+v^2}{r}\right)-2\,\omega\,u\cos\varphi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}+F_r \qquad (5)$$

ı ω est la vitesse angulaire de la terre. $\partial\Phi/\partial\lambda$ est pratiquement nul : $\partial\Phi/\partial\varphi$ est négligeable à côté de $\partial\Phi/\partial r$.

Appelons hauteur géodynamique h une quantité satisfaisant équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{u^2+v^2}{r}\right)-2\,\omega\,u\cos\varphi-F_r+\frac{\partial\Phi}{\partial r}=G\,\frac{\partial h}{\partial r} \qquad (6)$$

ı G est une constante : 980,665 cm par sec^2, à peu près égale à l'accélé-ıtion de la pesanteur à 45° de latitude. La condition aux limites sera onnée en annulant h au niveau moyen des mers pour lequel Φ = con-ıante. Le terme de loin le plus important du premier membre de (6) st $\partial\Phi/\partial r$; en effet, considérant le second terme en importance, on a

$$\frac{2\,\omega\,u\cos\varphi}{\partial\Phi/\partial r}<10^{-3}$$

Donc, à peu de chose près, nous pouvons écrire $\Phi = Gh +$ constante.

De (5) et (6) on déduit $\frac{1}{\rho} = -G \frac{\partial h}{\partial r} \Big/ \frac{\partial p}{\partial r}$ (7)

Eliminant $1/\rho$, les seconds membres de (3) et (4) s'écrivent à une très grande approximation

$$F_\lambda = -\frac{G}{\cos\varphi}\left[\frac{\partial h}{\partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\partial h}{\partial r}\Big/\frac{\partial p}{\partial r}\right] \text{ et } F_\varphi = -G\left[\frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{\partial h}{\partial r}\Big/\frac{\partial p}{\partial r}\right] \quad (8)$$

Choisissons une nouvelle coordonnée radiale z qui soit une fonction de p et de p seulement, et que nous définirons plus loin. Toute variable dépendante fonction de φ, λ, r et t, par ce changement de coordonnée, deviendra fonction de φ, λ, z et t. En particulier, les expressions (7) et (8) s'expriment dans les nouvelles variables

$$-G\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{\lambda,\varphi,t} \Big/ \frac{\partial p}{\partial z} ; \quad \frac{-G}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right)_{z,\varphi,t} \text{ et } -G\left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)_{z,\lambda,t}$$

Nous continuerons dans la suite à utiliser ce système de coordonnées isobariques et nous sous-entendrons les indices des dérivées partielles.

Les premiers membres de (3) et (4) peuvent être simplifiés en prenant la même approximation que pour l'équation (5). Les termes en dr/dt seront alors négligeables. En effet, les mouvements atmosphériques sont quasiment sphériques; car $dr/dt/\sqrt{u^2+v^2}$ est de l'ordre de 10^{-3} et $dr/dt/r$ est inférieur à 10^{-9} par seconde [3]. En conclusion, les deux composantes transversales du mouvement s'écrivent

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r}\tan\varphi - 2\omega v \sin\varphi = -\frac{G}{r\cos\varphi}\frac{\partial h}{\partial \lambda} + F_\lambda \quad (9)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r}\tan\varphi + 2\omega u \sin\varphi = -\frac{G}{r}\frac{\partial h}{\partial \varphi} + F_\varphi \quad (10)$$

3. Équation d'énergie

Revenons à l'équation thermodynamique (2); la température potentielle se définit

$$\frac{dQ}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{1}{\rho T} dp = c_p \frac{d\theta}{\theta}$$

Introduisant l'équation d'état (1) et choisissant une constante d'intégration $p_0 = 1000$ millibars, on obtient $\theta = T\,(p_0\ p)^{R/c_p}$.

Lorsque l'atmosphère est rigoureusement adiabatique : $dQ = 0$; θ est une constante θ_0. Supposons en outre que la pression au niveau des mers de cette atmosphère fictive soit partout 1000 millibars. Nous appellerons z la hauteur géodynamique d'une telle atmosphère. z sera uniquement fonction de p et pourra donc être utilisée comme troisième coordonnée du système de référence isobarique.

En effet, de (7), (1) et (11) on écrit pour l'atmosphère de référence

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{R\theta_0}{(p_0)^{R/c_p}} \times p^{R/c_p - 1}\frac{\partial p}{\partial z} = -G \qquad (12)$$

où seules interviennent les deux variables p et z. On obtient en intégrant

$$z = -\frac{c_p}{G}\frac{\theta_0}{}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\right] \qquad (13)$$

L'équation (12) peut s'écrire pour l'atmosphère réelle, à condition de remplacer la constante θ_0 par la température potentielle θ variable dans l'atmosphère réelle et z par h; on obtiendra ainsi par division

$$\partial h/\partial z = \theta/\theta_0 \qquad (14)$$

Comme h est à peu près égal à la hauteur géométrique, si θ_0 est une valeur moyenne de la température potentielle dans une région de l'atmosphère, z sera à peu près égal à la hauteur géométrique, il n'y aura pas dans cette région de déformation d'échelle verticale importante en passant de la coordonnée r à la coordonnée z.

Si θ varie d'un endroit à l'autre de l'atmosphère, la température potentielle d'une particule d'air reste presque constante. De l'équation (2) on obtient $d\theta/dt = \theta/c_pT$; $dQ/dt \cong 0$.

Au-dessus de la couche limite près du sol, le terme le plus important de l'énergie extérieure dQ est celui dû à la diffusion de la chaleur. Sa valeur approximative est donnée par [4] $1/\rho\ \partial/\partial z\ [c_p\ \rho K\ \partial\theta/\partial z]$ où nous avons confondu z avec la hauteur géométrique et où K est le coefficient de mélange. K ne semble pas être une constante rigoureuse, mais varie d'une façon très complexe avec un grand nombre de facteurs et en particulier avec z. Etant donné que ce terme est petit, nous prendrons comme valeur approximative

$$\frac{\theta}{c_pT}\frac{dQ}{dt} = K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

où K est supposé constant et égal à 10^5 cm^2 par seconde.

En coordonnées isobariques, θ est une fonction de t, λ, φ et z. Sans grande erreur, on peut considérer ces coordonnées comme des coordonnées sphériques. En effet, les surfaces d'égale pression $z = \text{const.}$ ne s'écartent pas plus de sphères exactes que le géoïde terrestre. L'atmosphère est relativement à l'étendue de la surface terrestre une couche très mince et pourrait presque être considérée à deux dimensions. Par exemple, une couche du sol à 22 kilomètres, différence entre le rayon terrestre équatorial et polaire, contient 95 % de l'atmosphère.

En conséquence, si nous posons $w = dz/dt$, nous aurons

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}u + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}v + \frac{\partial\theta}{\partial z}w = K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \qquad (15)$$

w est une quantité petite du même ordre de grandeur que dr/dt et par conséquent négligeable du point de vue cinétique, en comparaison des vitesses transversales. Cependant, étant uniquement fonction de la pression, elle est aussi une variable thermodynamique entraînant un changement des caractéristiques des masses d'air.

Dans l'équation (16) le produit $\partial\theta/\partial z \,.\, w$ est du même ordre de grandeur que les deux produits précédents et, par conséquent, il ne pourra pas être négligé. Il en sera de même dans les équations de mouvement.

4. Convergence et divergence

Le principe de conservation de la masse s'exprime en coordonnées isobariques par l'équation de continuité [5] [7] :

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial v\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial\lambda}\right] + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0 \qquad (16)$$

La même approximation que pour les équations de mouvement à été employée en remplaçant $1/\rho$ par son expression (7) dans l'équation classique et en négligeant le terme extrêmement petit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)\Big/\frac{\partial h}{\partial r} \cong \frac{2\,\omega\cos\varphi}{G}\frac{du}{dt} = 10^{-9}\ \text{sec}^{-1}$$

Passant à la coordonnée z et la vitesse w en utilisant (12) et (13), on obtient

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial(v\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial\lambda}\right] = \left(\frac{c_p}{R} - 1\right)\frac{w}{Z - z} - \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (17)$$

où Z est écrit pour $c_p\,\theta_0/G$ valeur de z au sommet de l'atmosphère. Le premier membre est la divergence isobarique que nous désignerons par δ. Quantité petite (de l'ordre de $10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}$) elle joue un rôle fondamental dans les développements atmosphériques entraînant les changements thermodynamiques des masses d'air. Deux schémas simplifiés peuvent représenter les phénomènes tels qu'ils sont observés :

1) il y a convergence dans la basse atmosphère avec mouvement ascendant et divergence dans la haute atmosphère, ou l'inverse (fig. 1).

2) il y a divergence dans la basse atmosphère avec mouvement descendant et convergence dans la haute atmosphère (fig. 2).

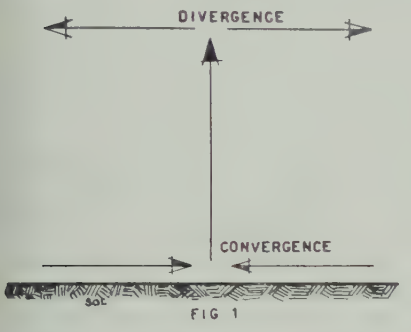


FIG 1

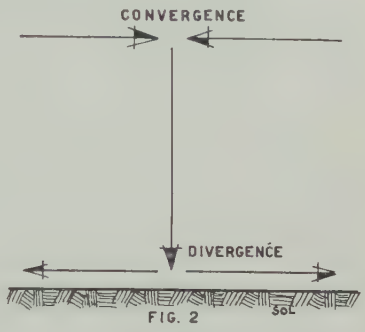


FIG. 2

Dans les deux cas, il existe un niveau dans la moyenne atmosphère sans convergence ou divergence.

L'hypothèse fondamentale de ce travail est de fixer invariablement ce niveau à 500 millibars, niveau auquel des mesures internationales de routine sont effectuées. Les déductions des mesures météorologiques montrent que cette hypothèse n'est pas en moyenne très loin de la réalité [6]. Précisons cette hypothèse en posant w de la forme :

$$w = (1 - z/Z)^2\,[(z - z')\,W + O\,(z - z_5)^4] \qquad (18)$$

où l'indice 5 s'applique au niveau de 500 millibars, $z' = \dfrac{(c_p/R+2)\;z_5 - z}{c_p/R + 1}$

correspondant à la pression de 1.005 millibars.

W est une fonction ne dépendant pas de z et O indiquant le degré des premiers termes en $(z - z_5)$ négligés dans la formule approximative.

Cette expression peut satisfaire les conditions aux limites :

a) w par définition est nulle au sommet de l'atmosphère $z = Z$.

b) w est aussi nul au sol $z = z_0$. Comme la pression au sol est en moyenne près de 1005 millibars, une petite correction $O\,(z_0 - z_5)^4$ suffira pour y annuler w.

Calculons la divergence de l'équation (17)

$$\delta = \frac{c_p/R + 2}{c_p/R + 1} \times (1 - z/Z) \left[\frac{z - z_5}{Z} W + O(z - z_5)^3 \right] \qquad (19)$$

la convergence s'annulera donc à 500 millibars et au sommet de l'atmosphère.

De l'expression (18) les dérivées par rapport à z jusque $\partial^3 w/\partial z^3$ pour le niveau z_5 seront proportionnelles à w_5. En particulier écrivons

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_5 = \frac{l\, w_5}{Z} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}\right)_5 = \frac{m\, w_5}{Z^2} \qquad \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} = \frac{n\, w_5}{Z^3} \qquad (20)$$

où les constantes sont

$$l = \left(\frac{c_p}{R} - 1\right) \frac{Z}{Z - z_5} = 2{,}963.8$$

$$m = \frac{\left(\frac{c_p}{R} + 1\right)\left(\frac{c_p}{R} + 2\right) Z^2}{(Z - z_5)^2} = 35{,}908$$

$$n = \frac{-2\, m\, Z}{Z - z_5} = -87{,}924.$$

Afin d'illustrer le type de structure verticale supposé, nous avons reproduit dans la figure 3 les deux courbes normalisées $10\ w/ZW$ et $-\delta/W$ en indiquant la pression en ordonnée, les termes d'ordre supérieur en $(z - z_5)^4$ ayant été négligés.

5. Équations de mouvement en projection stéréographique

Du point de vue dynamique, la fonction différentielle importante est la circulation par unité de surface isobarique donnée par la composante radiale du rotationnel de u, v :

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial\, u \cos \varphi}{\partial \varphi} \right]$$

Passant de la terre à des axes absolus, un terme dû à la rotation de la terre s'ajoute et ce qu'on appelle la vorticité absolue se définit

$$\zeta = 2\, \omega \sin \varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial\, u \cos \varphi}{\partial \varphi} \right] \qquad (21)$$

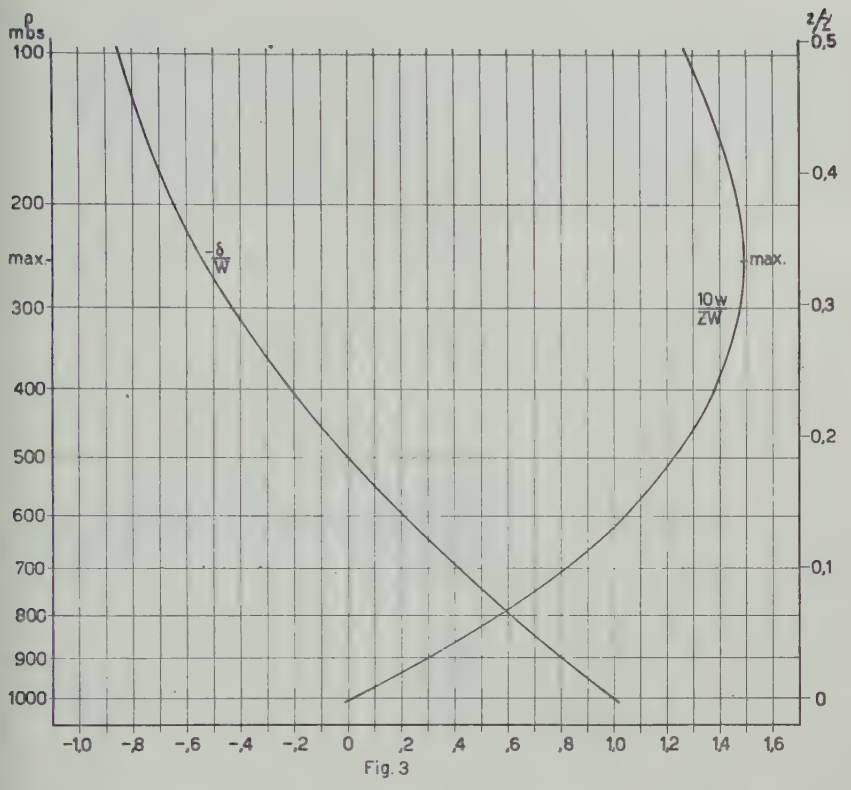


Fig. 3

L'introduction de ζ permet, en explicitant les dérivées totales comme dans l'équation (15), d'écrire les équations de mouvement (9) et (10) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \zeta v = -\frac{G}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(h + \frac{u^2+v^2}{2G}\right) + F_\lambda \qquad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \zeta u = -\frac{G}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h + \frac{u^2+v^2}{2G}\right) + F_\varphi \qquad (23)$$

où $\partial u/\partial z$ et $\partial v/\partial z$ sont généralement trop grands pour négliger leur produit avec w. Les forces de friction et de turbulence sont dans l'air libre très complexes, mais suffisamment petites pour qu'on puisse les exprimer au moyen d'un coefficient d'échange constant, égal à celui de la diffusion calorifique :

$$F_\lambda \cong K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \quad F_\varphi \cong K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad (24)$$

Dans les calculs numériques, les coordonnées sphériques sont d'un emploi malaisé. D'autre part, il est pratique d'utiliser les coordonnées des cartes météorologiques de travail. C'est la projection stéréographique des surfaces isobariques qui convient le mieux pour l'étude des phénomènes à grande échelle. Sur une telle carte du pôle

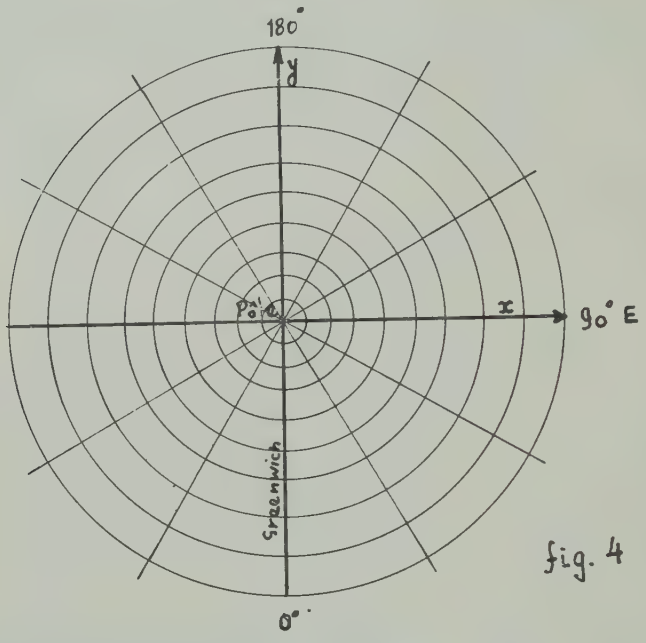


fig. 4

Nord comme origine, choisissons l'axe des y dans le prolongement du méridien de Greenwich, l'axe des x perpendiculaire suivant le méridien 90° Est (fig. 4).

$$x = r \tan (\pi/4 - \varphi/2) \sin \lambda \qquad y = -r \tan (\pi/4 - \varphi/2) \cos \lambda \tag{24}$$

Ecrivons pour abréger

$$s \equiv \sin \varphi = \frac{r^2 - (x^2 + y^2)}{r^2 + (x^2 + y^2)} \tag{25}$$

Définissons deux vitesses dans le plan de la carte (r = constante)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(1+s)^2 &\equiv v_x = (1+s)\ (u \sin \lambda + v \cos \lambda) \\ \frac{dy}{dt}(1+s)^2 &\equiv v_y = (1+s)\ (u \cos \lambda - v \sin \lambda) \end{aligned} \tag{26}$$

Les équations de mouvement (22) et (23) deviennent :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + w\frac{\partial v_x}{\partial z} - \zeta v_y = -\mathrm{G}\frac{\partial}{\partial x}\left[h + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2\mathrm{G}(1+s)^2}\right] + \mathrm{K}\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + w\frac{\partial v_y}{\partial z} + \zeta v_x = -\mathrm{G}\frac{\partial}{\partial y}\left[h + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2\mathrm{G}(1+s)^2}\right] + \mathrm{K}\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (28)$$

L'équation d'énergie (15) devient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{(1+s)^2}\left[v_x\frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y\frac{\partial \theta}{\partial y}\right] + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (29)$$

L'équation de continuité (17)

$$\frac{1}{(1+s)^2}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right] = \left(\frac{c_p}{\mathrm{R}} - 1\right)\frac{w}{\mathrm{Z} - z} - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (30)$$

L'équation hydrostatique reste inchangée

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (31)$$

mais l'expression de la vorticité absolue devient

$$\zeta = 2\,\omega\, s + \frac{1}{(1+s)^2}\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right] \quad (32)$$

Les 5 variables v_x, v_y, w, h, θ et ζ satisfont donc les 5 équations (27) à (32). Pour les intégrer, il faudra connaître les conditions initiales et aux limites. Malheureusement l'observation météorologique en dehors des observations au sol, nous donne seulement sous une forme utilisable, un réseau de valeurs de h et θ sur quelques surfaces isobariques de référence à 12 heures d'intervalle.

On peut en déduire par interpolation, les valeurs dans toute une région limitée en x, y, z, t.

Le premier problème consistera donc, connaissant h et θ au temps t, à déterminer v_x, v_y, w à cet instant.

6. Approximation géostrophique et équation du mouvement vertical

Le calcul de v_x et v_y se fait habituellement à partir des équations (27) et (28). Excepté près de l'équateur $s \cong 0$, on peut négliger

dans les premiers membres, l'accélération relative en comparaison de l'accélération plus importante de Coriolis, et dans les seconds membres les termes plus petits dus à la turbulence et à l'énergie cinétique. On définit ainsi l'approximation du vent géostrophique

$$v_y = \frac{G}{2\,\omega\,s}\frac{\partial h}{\partial x}\quad v_x = -\frac{G}{2\,\omega\,s}\frac{\partial h}{\partial y} \tag{33}$$

De (33) est déduite une approximation de la vorticité qui est assez bonne et est utilisée par la plupart des météorologistes. Tenant compte des termes dus à la variation de s

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{(1+s)^2\,x}{r^2}\qquad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{(1+s)^2\,y}{r^2} \tag{34}$$

on obtient

$$\zeta = 2\,\omega\,s + \frac{G}{2\,\omega\,s\,(1+s)^2}\nabla^2 h + \frac{G}{2\,\omega\,s^2\,r^2}\left(x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y}\right) \tag{35}$$

Malheureusement, l'approximation de la convergence au moyen du vent géostrophique est, en règle générale, erronée et est à rejeter. En effet, alors que les valeurs de $\partial v_y/\partial x$ et $\partial v_x/\partial y$ n'ont aucune corrélation entre elles, les deux dérivées $\partial v_x/\partial x$ et $\partial v_y/\partial y$ sont toujours presque égales et de signe contraire et une approximation de v_x et v_y peut entraîner une erreur relative considérable de la divergence δ.

On peut cependant la calculer à partir de w (voir équation 30). Quant à w il peut être déterminé de l'équation (29) où nous avons introduit l'approximation géostrophique :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}w = \frac{G}{2\,\omega\,s\,(1+s)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial t} + K\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \tag{36}$$

L'évaluation de $\partial\theta/\partial t$ ne peut être très précise en partant de données espacées de 12 heures. Il vaut mieux utiliser (29) comme une équation de prédiction de θ et éliminer la dérivée de θ par rapport au temps à l'aide des équations du vent thermique.

Dérivons les équations (27) et (28) par rapport à z. Après réarrangement et utilisation de l'équation (31), on obtient

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t\,\partial z} + \frac{1}{(1+s)^2}\left[\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial z} + v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z}\right]$$

$$+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial z} + w\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - 2\,\omega\,s\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{G}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial x} + K\frac{\partial^3 v_x}{\partial z^3} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z} + \frac{1}{(1+s)^2}\left[\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z}\right]$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial z} + w\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + 2\omega s \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{G}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial y} + K\frac{\partial^3 v_y}{\partial z^3} \qquad (38)$$

Retenant seulement les termes les plus importants, on obtient les équations du vent thermique

$$2\omega s \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{G}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad -2\omega s \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{G}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad (39)$$

qui peuvent aussi s'obtenir en dérivant les équations (33) par rapport à z.

Exprimons dans les autres termes le vent par son approximation géostrophique. Considérons les dérivées de l'équation (29) successivement par rapport à y et à x; en vertu de (39) nous obtiendrons une expression de la dérivée par rapport au temps du vent thermique qui introduite dans les termes approchés du second ordre de (37) et (38) éliminera le temps de ces équations.

On obtient ainsi de (29)

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial z} + \frac{1}{(1+s)^2}\left[v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z}\right] + w\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - K\frac{\partial^3 v_x}{\partial z^3} \cong$$

$$\frac{G^2}{4\omega^2 s^2 (1+s)^2 \theta_0}\left[\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right] + \frac{G}{2\omega s \theta_0}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z} + \frac{1}{(1+s)^2}\left[v_x \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z}\right] + w\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - K\frac{\partial^3 v_y}{\partial z^3} \cong$$

$$\frac{G^2}{4\omega^2 s^2 (1+s)^2 \theta_0}\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right] - \frac{G}{2\omega s \theta_0}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Les équations du mouvement relatif s'écrivent

$$2\omega s \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{G}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{G}{2\omega s \theta_0}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]$$

$$+ \frac{G^2}{2\omega^2 s^2 (1+s)^2 \theta_0}\left[\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right] \qquad (40)$$

$$-2\omega s\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{G}{\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{G}{2\omega s\theta_0}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]$$

$$+\frac{G^2}{2\omega^2 s^2(1+s)^2\theta_0}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right] \qquad (41)$$

Comme pour l'approximation géostrophique, ces formules approchées ne sont pas valables pour les régions équatoriales.

Ces équations ne sont utiles pour déterminer w que dans le cas où une autre fonction du vent relatif était connue indépendamment. Or nous avons vu qu'à 500 millibars

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial z}=m(1+s)^2\frac{w}{Z}$$

Dérivant (40) par $\partial/\partial y$ et ajoutant (41) dérivé par $-\partial/\partial x$ nous obtenons pour 500 millibars avec la même approximation que précédemment en tenant compte de (20)

$$\nabla^2 w\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{l\theta}{Z}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{l\theta}{Z}\right)$$

$$-\frac{w}{Z}\left[l\Delta^2\theta+\frac{4\omega^2 s^2\theta_0 m(1+s)^2}{GZ}\right]$$

$$+\frac{(1+s)^2 2\omega}{r^2}\left(y\frac{\partial\theta}{\partial x}-x\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \qquad (42)$$

$$+\frac{G}{2\omega s(1+s)^2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 h-\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 h+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=0$$

w sera donc solution d'une équation elliptique aux dérivées partielles du second ordre dont tous les coefficients de w et ces dérivées sont des quantités déterminables des données d'observation.

7. Les deux potentiels du mouvement et leur variation avec le temps

Au lieu de faire dépendre les vitesses de la seule fonction potentielle,

h (forme approchée équation 33), nous définirons deux potentiels : ψ la fonction de flux et χ la fonction de développement [7] telles que

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \tag{43}$$

La fonction de flux déterminera à elle seule la vorticité

$$\zeta = 2\,\omega\, s + 1/(1+s)^2\, \nabla^2 \psi$$

et la fonction de développement χ la convergence $\delta = 1/(1+s)^2\, \nabla^2 \chi$ et en vertu de (30) le champ de vitesse à travers les surfaces isobariques et les changements thermodynamiques qui en découlent. Du point de vue physique, ces fonctions doivent être finies et dérivables sur toute l'étendue des surfaces isobares, elles seront déterminées univoquement à une constante additive près par (43).

Pour examiner les variations avec le temps de ces deux potentiels, combinons, en les dérivant, les deux équations (27) et (28). Posons tout d'abord

$$\nabla^2 \psi = \zeta' \; ; \; \nabla^2 \chi = \delta' \tag{45}$$

$\frac{\partial}{\partial x}(27) + \frac{\partial}{\partial y}(28)$ donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta' + w\frac{\partial \delta'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z} - \zeta\zeta' - \frac{\partial \zeta}{\partial x}v_y + \frac{\partial \zeta}{\partial y}v_x = -\mathrm{G}\,\nabla^2 \left[h + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2\mathrm{G}\,(1+\mathrm{S})^2}\right] + \mathrm{K}\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} \tag{45}$$

L'autre opération $\partial/\partial x$ (28) — $\partial/\partial y$ (27) donne

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + w\frac{\partial \zeta'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial z} + \zeta\,\delta' + \frac{\partial \zeta}{\partial x}v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}v_y = \mathrm{K}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \tag{46}$$

Ces équations sont à quatre variables; mais dans le cas de la surface de 500 millibars, l'équation (45) se réduit à deux variables. En effet $\delta_5 = 0$ d'où $\nabla^2 \chi_5 = 0$ sur toute l'étendue de la sphère. La seule solution sans infini et singularité possible sera $\chi_5 =$ constante. Les vitesses sont alors déterminées par la fonction de flux :

$$v_{x.5} = -\partial \psi_5/\partial y \; ; \; v_{y.5} = \partial \psi_5/\partial x$$

(44) peut s'écrire en sous-entendant l'indice 5

$$\zeta \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = G\nabla^2\left[h + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2G\ (1+s)^2}\right] + w\ (Kn - mw) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z} \qquad (48)$$

Cette équation peut être considérée comme une équation aux dérivées partielles en ψ assez complexe. On peut cependant en déduire une équation linéaire approchée. En effet, dans le second membre, le terme important est $G\,\nabla^2 h$. Dans les autres termes, remplaçons w par la solution de l'équation approchée (42) et le vent par son approximation géostrophique. Dans le premier membre, remplaçons ζ et ses dérivées par son approximation géostrophique. (48) devient alors une équation elliptique du second ordre en ψ. Sa solution donnera par dérivation une approximation de v_x, v_y et donc de ζ qui réintroduits dans (48) permettront de calculer une nouvelle approximation de ψ etc. Il n'est pas possible de montrer la convergence de ce processus, mais si nous remarquons que $\nabla^2 \psi$ est en général petit comparé à $2\,\omega\,s$, il est raisonnable de supposer que cette méthode convergera en tout cas formellement.

Les équations (42) et (48) déterminent donc w et ψ et, par conséquent, v_x, v_y et w. L'équation (46) pourra être utilisée pour calculer la dérivée de ψ par rapport au temps que nous désignerons par $\psi' \equiv \partial\psi/\partial t$.

Si nous introduisons l'approximation géostrophique dans les termes du second ordre, remarquant ainsi que $\partial\zeta'/\partial z = G/2\,\omega\,s\,\theta_0\ \nabla^2\theta$, on obtient une équation de Poisson

$$\nabla^2\psi' + \frac{\partial \zeta}{\partial x}v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}v_y + \frac{G}{2\,\omega\,s\,\theta_0}\left[w\,\nabla^2\theta - K\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] = 0 \qquad (49)$$

Nous connaîtrons donc finalement les variations avec le temps $\partial\theta/\partial t$ au moyen de (29) et $\partial\psi/\partial t$ au moyen de (49). La prévision s'effectuera en intégrant numériquement par rapport au temps. Lorsque θ et ψ sont connus à une date ultérieure, w pour cette date peut être déterminé à partir de (42) dans laquelle v_x et v_y s'expriment non plus approximativement en fonction de h, mais par leur expression exacte en fonction de ψ.

Si on désire connaître la distribution de h pour cette date, il suffira, connaissant ψ, θ et w, de considérer (48) comme une équation de Poisson par rapport à h.

8. Conclusion

Nous avons tenu compte dans les équations, de la dynamique météorologique, de la sphéricité de la terre et du mouvement vertical. L'aplatissement de la terre et des termes de cet ordre de grandeur ont été négligés, ainsi que la convergence du vent le long de la surface isobarique de 500 millibars.

Pour ce niveau, les équations non linéaires de l'hydrodynamique se simplifient.

Le problème de la dynamique atmosphérique se réduit alors à la solution d'équations elliptiques aux dérivées partielles du second ordre (48), (49) et (50) et d'équations linéaires du premier ordre aux dérivées partielles par rapport au temps.

L'intégration numérique de ces équations soulèvera encore les problèmes difficiles des conditions aux limites et de la stabilité de la solution. Leur solution permettra d'apprécier l'importance des termes dus à la sphéricité de la terre et au mouvement vertical habituellement négligés.

ADDENDUM

Un examen des observations météorologiques paru depuis la remise du manuscrit [8] semble prouver que le niveau de plus petite convergence absolue se situe plutôt aux environs de la surface standard de 700 millibars.

La théorie et les formules précédentes s'appliquent en remplaçant comme niveau de base 500 par 700 millibars.

La seule correction consiste à modifier la structure de la vitesse verticale w en prenant un exposant 6 au lieu d'un exposant 2 et d'écrire la formule (18) :

$$w = (1 - z/Z)^6 [(z - z') W + O(z - z_7)^4]$$

et de modifier en conséquence la formule (19) et les constantes (20).

REFERENCES

[1] Richardson, *Weather prediction by numerical process*, 1922.

[2] Brunt, *Dynamical Meteorology*, p. 163, 1944.

[3] Linkes, *Meteorologisches Taschenbuch*, p. 502, 1953.

[4] Sutton, *Micrometeorology*, p. 146, 1953.

[5] Sutcliffe, *Quarterly Journal R. Meteorological Soc.* n° 73, 1947.

[6] Charney, Fjortoft, Von Neumann, *Tellus*, Vol. 2 n° 4, 1950.

[7] Godart, *Bulletin trimestriel service météor. R.V.A.* Eté 1953 et printemps 1954.

[8] Holbrook Landers, *Journal of Meteorology*, vol. 12, n° 5, p. 415.

Réponse des scintillateurs inorganiques activés à l'énergie des radiations incidentes

PAR

Auguste MEESSEN *

Laboratoire de Physique Nucléaire, Université Catholique de Louvain

Résumé

Nous donnons une description détaillée du processus de scintillation dans les cristaux inorganique activés, tel le NaI:Tl, pour en déduire une formule théorique générale, donnant la fluorescence spécifique du cristal en fonction de la densité d'ionisation produite par la radiation incidente.

Nous avons pu effectuer ce calcul également dans le cas où l'étouffement du réseau diminue pendant la scintillation, ce qui nous permet d'expliquer la « désaturation de la réponse » pour des particules très ionisantes. Cet effet mesuré tout récemment n'avait pas été compris.

« L'effet de surface », a été étudié pour donner une formule tenant compte de la densité d'ionisation distribuée sur le parcours de la particule près de la surface, corrigeant ainsi la formule erronée de Birks qui nécessitait d'ailleurs des valeurs exagérées des paramètres.

Enfin il nous est possible de déduire automatiquement une formule décrivant l'influence de la concentration en activateur c.-à-d. des centres de luminescence.

Le fait que les formules théoriques obtenues sont conformes à l'expérience, aussi bien pour les cristaux organiques que pour les cristaux inorganiques, montre aussi que la théorie est formellement analogue pour les deux espèces de cristaux. La théorie doit être générale, en effet, l'extension aux cristaux organiques, n'est qu'une question de terminologie. Il suffirait d'utiliser les expressions générales : probabilités de transfert, d'étouffement interne et d'étouffement externe de l'énergie d'excitation au centre de luminescence. Nous préférons cependant le langage particulier mais précis se basant sur l'image claire dont nous disposons pour les cristaux inorganiques activés.

Introduction

Les « phosphores » ou cristaux scintillateurs organiques, comme l'anthracène, ou inorganiques comme le NaI:Tl, sont actuellement d'un usage très courant dans les compteurs à scintillations. Bombardés par des radiations ionisantes, ces cristaux émettent une lumière de luminescence de très courte durée dont l'intensité, mesurée par l'amplitude des impulsions d'un photomultiplicateur varie avec l'énergie du photon gamma ou de la particule incidente. Cette « réponse » est linéaire, sauf aux basses énergies quand la densité d'ionisation est grande. Dans ce cas s'introduisent différents processus d'étouffement que nous nous proposons d'étudier.

* Boursier de l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires. Présenté par M. Marc de Hemptinne.

L'étude de la réponse des cristaux organiques, a préoccupé beaucoup de chercheurs ([1-5]), mais n'a su englober les résultats que dans quelques formules semiempiriques ([6, 7]). C'est qu'il n'existe pas de théorie satisfaisante et décisive sur le transfert de l'énergie d'excitation d'une molécule à l'autre dans les cristaux ou liquides organiques ([5, 8, 9]).

Pour l'iodure de sodium activé au thallium, des mesures ont montré un comportement analogue bien que ce cristal soit beaucoup plus efficient et de meilleure linéarité ([10, 11]). Cela est dû au meilleur transfert de l'énergie d'excitation, qui se fait comme nous savons, par conduction du cristal. Ayant une connaissance suffisamment précise des centres de luminescence et des centres colorants dans les cristaux d'halogénures alcalins depuis les dernières années ([12-16]) nous avons pu donner une bonne description du processus de scintillation, afin d'en déduire des formules théoriques pour la réponse.

Le processus de scintillation

Dans un cristal parfait d'halogénure alcalin, la bande fondamentale entièrement remplie et la bande de conduction entièrement vide, sont fortement séparées. L'introduction d'un ion activateur, p. ex. d'un ion Tl^+ remplaçant un ion Na^+ du réseau normal d'iodure de sodium, formera un « *centre de luminescence* ». En ce point, un petit nombre de niveaux discrets d'énergie s'intercaleront entre les deux bandes. La configuration de ces niveaux a été étudiée tout récemment. Nous distinguons les niveaux d'émission des niveaux métastables. Nous supposons que la scintillation est uniquement fluorescente, c.-à-d. qu'elle est éteinte avant que n'apparaissent les phosphorescences provenant de l'activation thermique des électrons du niveau métastable. Un étouffement interne (self-quenching) est cependant possible dans le centre de luminescence : c'est le passage d'électrons du niveau d'émission au niveau métastable pendant la scintillation, nous lui donnons la probabilité q.

Mais des niveaux discrets d'énergie peuvent encore apparaître en des endroits où le réseau est perturbé soit par manque d'un ion, soit par un ion en position intersticielle. Ce sont les « *centres colorants* », qui sont de vrais pièges à électrons. Nous supposons donc que les électrons tombés dans ces pièges, ne contribuent plus à la scintillation considérée. Varley ([17]) a montré comment ces centres peuvent être formés par les radiations incidentes.

Considérons maintenant une particule ionisante, ou un électron libéré dans le cristal par un photon incident, soit par effet Compton, photoélectrique ou de production de paires. Soit $d\mathrm{E}/dx$ l'ionisation spécifique c.-à-d. la densité d'ionisation le long du trajet de la particule considérée. Si n_1 est le nombre d'électrons qui se trouve dans un cm de la bande de conduction à l'instant t, le nombre initial n_{10} d'électrons mis par effet direct ou indirect dans la bande de conduction par suite du passage de la particule, pour un cm de son parcours, sera

$$n_{10} = k\, d\mathrm{E}/dx \qquad (1)$$

le nombre n_1 d'électrons diminue rapidement par suite de la probabilité de conduction et d'absorption des électrons dans un niveau d'émission (t_1) ou un niveau métastable (t_2) d'un centre de luminescence, ou dans un piège à électrons (Q) ou même dans la bande fondamentale (f). Fig. 1.

Mais nous devons tenir compte aussi des concentrations des centres de luminescence (C), des centres colorants (c) et des trous d'électrons dans la bande fondamentale (c'). Pour ces deux dernières concentrations, une partie des centres colorants et des trous d'électrons existait déjà avant le passage de la particule ionisante, une autre partie est formée lors du passage même. Nous pouvons donc écrire pour ces concentrations à l'instant initial

$$c_0 = a + b\, d\mathrm{E}/dx \text{ et } c'_0 = d + g\, d\mathrm{E}/dx \qquad (2)$$

Nous distinguerons deux cas : 1) les concentrations c et c' des pièges et trous d'électrons restent constantes, donc égales à c_0 et c_0, pendant la scintillation. Cela sera assez vrai quand n_{10} et donc $d\mathrm{E}/dx$ est assez petit. 2) les concentrations c et c' diminuent pendant la durée de la scintillation, par suite du remplissage. C'est le cas quand $d\mathrm{E}/dx$ est assez grand; c.-à-d. pour des particules très ionisantes à basse énergie.

Calcul de la formule fondamentale, quand $d\mathrm{E}/dx$ est assez petit

Avec les notations précédentes, les variations du nombre n_1 d'électrons dans la bande de conduction, et du nombre n_2 de centres de luminescence ayant un électron dans leur niveau d'émission sera donné par :

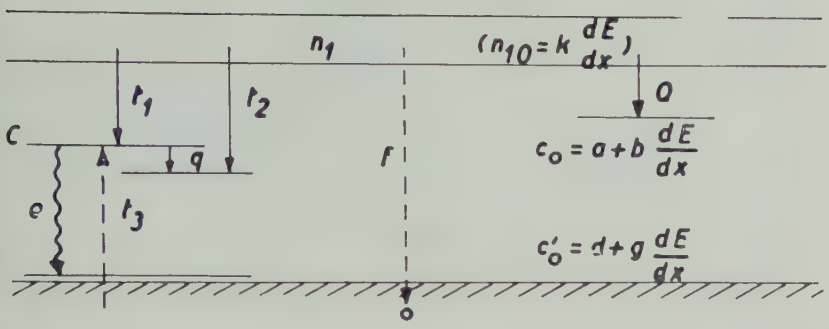


Fig. 1 SCHEMA DU PROCESSUS DE SCINTILLATION

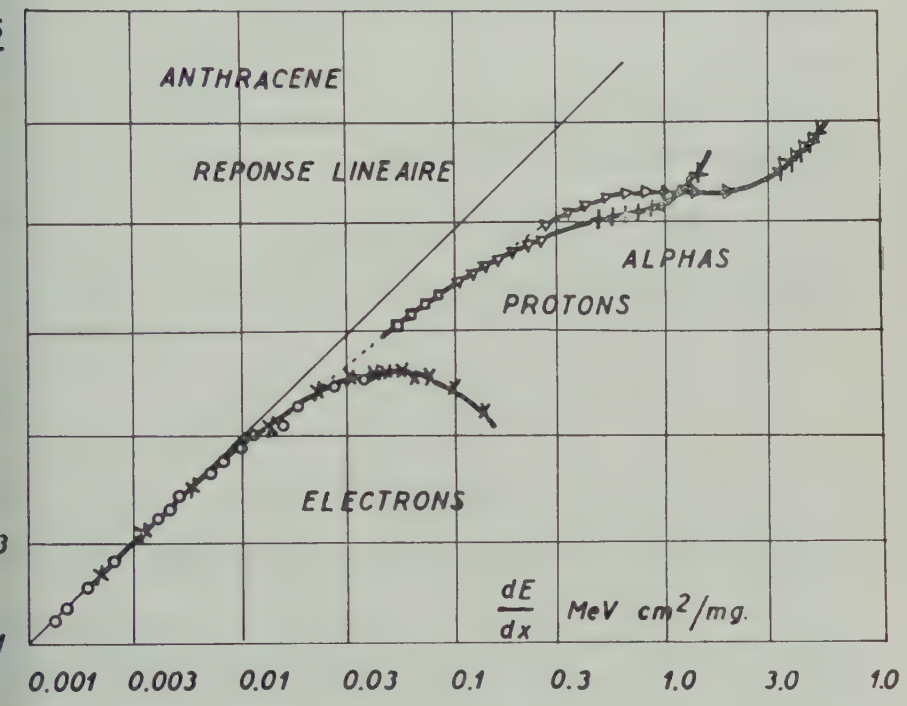


Fig. 2 FLUORESCENCE SPECIFIQUE EN FONCTION DE L'IONISATION SPECIFIQUE o ROBINSON AND JENTSCHKE, X BIRKS, □ FRANZEN, ▽ TAYLOR a.o., + ZIMMERMAN)

$$dn_1/dt = -(t_1 C + t_2 C + f c_0' + Q c_0)\, n_1; \quad (3)$$

$$dn_2/dt = -(e + q)\, n_2 + (t_1 + f t_3 c_0')\, C\, n_1 \quad (4)$$

Ici e est la probabilité pour l'émission de fluorescence, et $f t_3 c_o'$ la probabilité de « transfert optique » qui est important dans les cristaux organiques et qui existe aussi dans les cristaux inorganiques ([11, 18, 19]). Nous trouvons que

$$n_1 = n_{10} \exp -(t_1 C + t_2 C + f c_0' + Q c_0)\, t; \quad (5)$$

$$n_2 = n_{20} \exp -(e + q)\, t \text{ avec } n_{20} = \int_0^\infty (t_1 + f t_3 c_0')\, C n_1\, dt \quad (6)$$

En supposant que le transfert soit terminé au moment où la scintillation débute. Nous voulons calculer la fluorescence spécifique dS/dx

$$dS/dx = \int_0^\infty e\, n_2\, dt = \frac{e}{(e+q)}\, n_{20} = \frac{e\,(t_1 + f t_3\, c_0')\, C\, n_{10}}{(e + q)\,(t_1 C + t_2 C + f c_0' + Q c_0)}$$

Enfin en tenant compte de (1) et (2) et sachant que dE/dx est assez petit, on trouve une formule de la forme

$$dS/dx = \frac{A\, dE/dx}{1 + B\, dE/dx} \quad (7)$$

qui est identique à la formule semi-empirique de Birks ([6]), avec les constantes explicitées cette fois-ci :

$$A = \frac{e\, C\, k\, (t_1 + f t_3\, d)}{(e + q)\,(t_1 C + t_2 C + f d + Q a)} \quad (8)$$

$$B = \frac{(f g + Q b)}{(t_1 C + t_2 C + f d + Q a)} \quad (9)$$

La formule (7) représente une courbe qui s'adosse aux deux droites suivantes :

1) Lorsque dE/dx est petit, c.-à-d. pour des particules pas trop ionisantes, à haute énergie, on a $dS/dE = A$, c'est la région de réponse linéaire. Nous avons une droite passant par l'origine, de coefficient angulaire A.

2) Lorsque dE/dx est assez grand, on a $dS/dx = A/B$, l'intensité des scintillations sera proportionnelle au chemin parcouru par les particules et non pas à leur énergie. On a une droite horizontale.

Cette courbe théorique est assez bien en accord avec les courbes expérimentales (Fig. 2). Jusqu'à présent on s'est toujours contenté

le cette formule. Cependant en 1954 Milton et Frazer [20] ont mesuré a fluorescence spécifique en fonction de l'ionisation spécifique pour les produits de fission dans l'anthracène. Ils ont trouvé une courbe montante. (Fig. 3). En 1955, Zimmerman [21] a mesuré ces mêmes ourbes pour des protons et des particules alpha de très basse énergie, .-à-d. jusqu'à 50 kev. Il a également trouvé une courbe montante. Dans ces deux cas dE/dx est très grand, partant le nombre n_{10} d'élec-rons excités est tellement grand, de sorte qu'il y en a beaucoup qui ombent dans des pièges, et donc la concentration de ceux-ci ne eut plus être considérée comme constante pendant la scintillation.

La courbe réelle s'explique donc par les phénomènes suivants :

1) A haute énergie, la densité d'ionisation est faible, l'intensité les scintillations augmente régulièrement avec le nombre d'électrons xcités dans la bande de conduction.

2) A basse énergie, donc à densité d'ionisation plus grande, beaucoup le ces électrons sont capturés dans des pièges à électrons. Puisque 'étouffement augmentera régulièrement, l'intensité lumineuse arrivera une saturation.

3) A très basse énergie, lorsque la densité d'ionisation est très rande, la concentration des pièges diminuera pendant la durée de a scintillation même, par conséquence l'étouffement sera diminué; y a désaturation.

Calcul de la formule générale

Nous supposons donc que la concentration des centres colorants u pièges à électrons, diminue pendant le transfert des électrons de a bande de conduction au centre de luminescence, suivant l'équation

$$dc/dt = -Q\,c\,n_1, \text{ d'où } c = c_0 \exp -(n_1 Q)\,t$$

$_0$ est donné par (2) de même $c' = c_0'$ qui est supposé rester constant, e qui est valable puisque le nombre des trous d'électrons dans la ande fondamentale doit être très grand. t étant très petit, nous ouvons écrire

$$c \cong c_0\ (1 - n_1\,Q\,t) \qquad (10)$$

a théorie précédente reste valable, sauf qu'il faut remplacer c_0

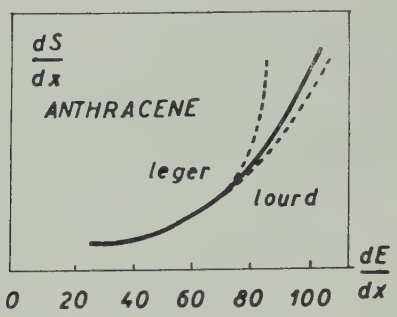


Fig. 3

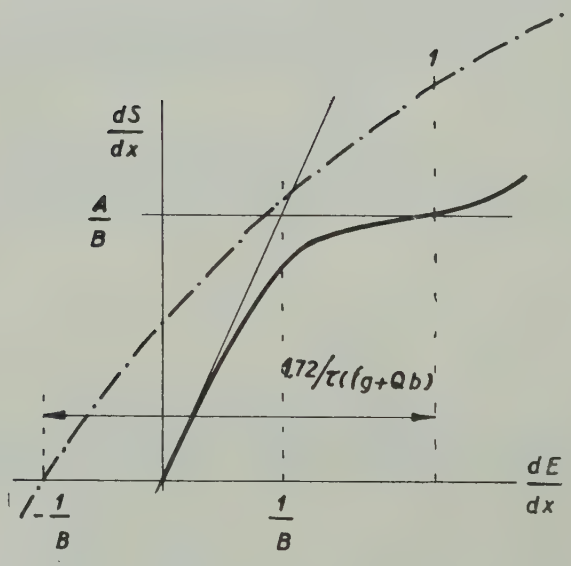


Fig. 4

FLUORESCENCE SPECIFIQUE vs. IONISATION SPÉCIFIQUE THÉORIQUE (fig. 4) et expérimentale pour des produits de fission. (fig. 3).

dans l'équation (3), qui devient alors du type de l'équation de Bernoulli :

$$dn_1/dt = -(t_1C + t_2C + fc_0' + Qc_0)\ n_1 + Q^2 t n_1^2 = -R\ n_1 + Q^2 t n_1^2 \quad (11)$$

Elle admet comme solution :

$$n_1 = \frac{1}{[1/n_{10} - Q^2/R^2]\ e^{Rt} + Q^2\ (Rt + 1)\ R} \cong \frac{n_{10}}{(1 + Rt)} \quad (12)$$

en supposant encore une fois qu'on peut écrire $\exp(Rt) \cong 1 + Rt$.

Ceci est valable et nous pouvons même appeler τ le « temps de transfert », nécessaire pour vider la bande de conduction et « charger» les centres de luminescence. Nous supposons que la scintillation ne commence qu'après ce temps τ. Nous aurons donc l'équation (6) avec

$$n_{20} = (t_1 + ft_3c_0')\ C \int_0^{\tau} n_1 dt = \frac{(t_1 + ft_3c_0')\ C\ n_{10}}{R} \log\ (1 + R\ \tau)/R$$

Enfin nous obtenons la formule générale, qui tient compte de la diminution de la concentration des pièges à électrons pendant la scintillation. Elle est valable pour dE/dx quelconque; on suppose uniquement que le temps de transfert τ soit assez court, ce qui est parfaitement vrai. On a

$$dS/dx = \frac{A\ dE/dx}{1 + B\ dE/dx} \log\ (m + n\ dE/dx) \quad (13)$$

C'est exactement la formule (7) à une fonction multiplicative près. Celle-ci n'est nulle que pour $dE/dx = -1/B$, et vaut l'unité pour

$$dE/dx = \frac{1{,}72}{\tau(fg + Qb)} - 1/B.$$

Avant ce dernier point le logarithme a pour effet d'abaisser la courbe, et au de-là de relever la courbe représentant la formule (7). Nous obtenons ainsi une courbe identique aux courbes expérimentales. Elle n'a pas seulement le mérite de faire remonter la courbe pour les densités d'ionisation très grandes, mais encore d'expliquer pourquoi elle s'écarte tellement des droites données par la formule fondamentale pour dE/dx assez petit. (Fig. 4).

Nous arrivons donc à l'explication complète des expériences citées. Remarquons que la formule ([22]) proposée par ces auteurs, incluant un terme quadratique négatif en dénominateur dans la formule (7)

est erronée au point de vue physique, parce que les concentrations et probabilités introduites dans l'expression de l'étouffement sont positives. La formule avec un terme logarithmique que Wright [23] a proposé pour expliquer la faible diminution dans le temps de déclin de la luminescence quand dE/dx augmente, est meilleure. Il part de l'idée physique d'un étouffement bimoléculaire, mais ses approximations sont beaucoup trop rudimentaires.

Discussion et conséquences

1) Aux courbes précédentes, correspondent les courbes de réponse (Fig. 5) qui donnent l'intensité S des scintillations en fonction de l'énergie E des particules incidentes. On voit bien qu'aux grandes énergies on a des droites parallèles pour différentes particules dans un même cristal; ce qu'il faut, puisque théoriquement nous prévoyons le coëfficient angulaire A, constant pour un cristal donné.

2) La non-linéarité aux basses énergies augmente pour des particules plus ionisantes. Cependant les différentes courbes de réponse pour un même cristal peuvent se glisser les unes sur les autres, moyennant un simple changement d'échelle, c.-à-d. en divisant S et E par MZ^2, où M et Z sont la masse et la charge de la particule incidente [24].

3) En considérant la fig. 2 et 4, nous voyons que pour des particules plus ionisantes, la droite horizontale est plus élevée, tandis que la droite passant par l'origine est inchangée. Cela est vrai si A est constant et si B diminue pour des particules plus ionisantes. Les formules (8) et (9) confirment cette idée, car il n'y a que le terme $(fg + Qb)$, qui peut dépendre de la nature des particules ionisantes. Cela peut être dû aux effets suivants :

a) la concentration $g\,dE/dx$ de trous d'électrons dans la bande fondamentale est moindre. Ceci est compréhensible puisque pour des particules plus ionisantes il y a plus d'électrons excités à partir de niveaux inférieurs à la bande fondamentale.

b) la concentration de centres colorants $b\,dE/dx$, produite par le passage de la particule est plus faible, ceci est moins sûr. Enfin

c) il y a l'effet de surface, qui sera encore discuté.

4) Sur les mêmes figures, on observe également que le point où la saturation commence par être levée est plus loin pour des particules plus ionisantes. C'est dû encore une fois à la diminution de $(fg + Qb)$ discutée ci-dessus.

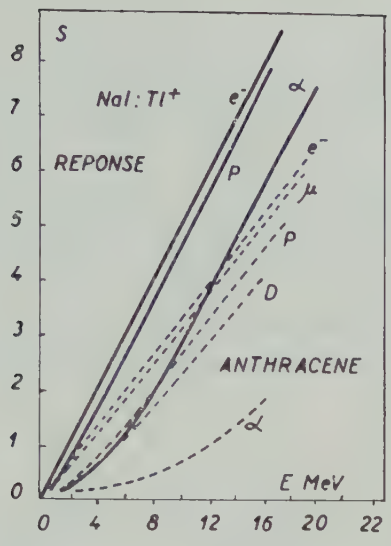

S
NaI : Tl+
REPONSE
e⁻
α
p
e⁻
μ
p
D
ANTHRACENE
α
E MeV
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
4
8
12
16
20
22

Fig. 5

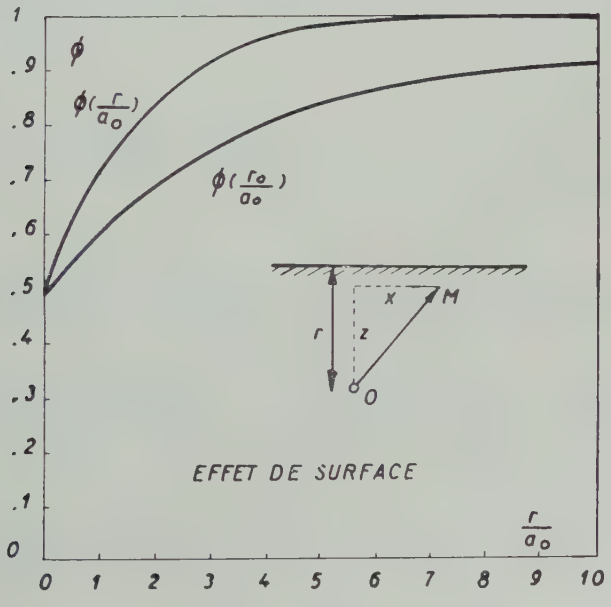

φ
φ(r/a₀)
φ(r₀/a₀)
x
M
r
z
O
EFFET DE SURFACE
r/a₀
0
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig. 6

Effet de surface

Dans ce qui précède nous avons supposé que les n_{10} électrons excités dans la bande de conduction, sont tous absorbés dans le cristal. En réalité le cristal ne présente qu'un volume fini. Les particules incidentes par une des faces du cristal, n'ont qu'une certaine pénétration (range r_0) fonction de leur pouvoir ionisant. Il y aura donc un effet de surface, puisque une partie des électrons excités dans la bande de conduction près de la surface, pourra s'échapper du cristal. C'est donc une cause additionnelle d'étouffement.

a) Supposons qu'au point 0, à la distance r de la surface considérée, n_0 électrons se trouvent dans la bande de conduction. Ils peuvent traverser le cristal dans toutes les directions. Considérons la direction OM, si

$$dn/da = -k\,n, \text{ on a } n(a) = n_0 \exp(-|a|/a_0),$$

en supposant que $a_0 = 1/k$, soit le libre parcours moyen de ces électrons dans la bande de conduction du cristal. Après le parcours a_0 le nombre d'électrons aura diminué de 1/2,72 de sa valeur initiale.

b) Calculons la probabilité $\varnothing_r$ d'absorption dans le cristal pour ces n_0 électrons se trouvant à la distance r de la surface du cristal, considéré sinon comme infini. On aura (Fig. 6) :

$$\varnothing_r = \int_{-\infty}^{r} dz \int_0^{\infty} \exp(-|a|/a_0)\,.\,2\pi x\,dx = 2\pi a^3 \int_{-\infty}^{r} dz \int_0^{\infty} \exp\left(-\sqrt{X^2+Z^2}\right) dX^2$$

où $X = x/a_0$ et $Z = z/a_0$. Par substitution, et ensuite en intégrant par parties, on obtient :

$$\varnothing_r = 4\pi\, a_0^3\, [-4 + (r/a_0 + 2) \exp(-r/a_0)]$$

Pour un cristal infini par contre la probabilité d'absorption est

$$\varnothing_{r=\infty} = -16\pi\, a_0^3$$

Le n_{10} utilisé précédement aurait dû en réalité être multiplié par $\varnothing_r$ et non par $\varnothing$ par lequel il est implicitement multiplié. Il faut donc multiplier n_{10} par

$$\varnothing\,(r/a_0) = \varnothing_r/\varnothing = 1 - 1/4\,(r/a_0 + 2) \exp(-r/a_0) \qquad (14)$$

cette fonction vaut 1/2 pour $r = 0$ et l'unité pour r infini, ce qu'il faut.

Birks ([25, 1]) a voulu déduire cette formule, mais a fait une erreur de calcul à deux reprises. En plus cette formule ne suffit pas encore, car

c) Les électrons sont excités dans la bande de conduction sur tout le parcours de la particule ionisante, et pas seulement en un point. Nous supposons que sur la pénétration moyenne r_0 (range), la densité d'ionisation dE/dx et donc n_{10} aussi, soient constants. $n_{10}r_0$ représente le nombre total d'électrons excités initialement lors du passage de la particule.

La probabilité d'absorption dans le cristal $o\,(r/a_0)$ varie avec la distance r. La probabilité totale s'obtient par intégration sur r et la probabilité moyenne d'absorption dans le cristal en un point quelconque du parcours de la particule, s'obtient en divisant par r_0 :

$$o\,(r_0/a_0) = 1/r_0 \int_0^{r_0} o\,(r/a_0)\,dr$$

d'où :

$$o\,(r_0/a_0) = 1 - 3/4\,\frac{(1 - \exp\,(-r_0/a_0))}{r_0/a_0} + 1/4\,\exp\,(-r_0/a_0) \quad (15)$$

Il faut donc multiplier par $o\,(r_0/a_0)$ et non par $o\,(r/a_0)$! Ces deux fonctions ont le même comportement aux limites, mais la première donne une effet plus important. Nous avons donné ces deux courbes, pour la comparaison, dans la fig. 6.

Birks avait ajusté la valeur de a_0 pour relier sa formule analogue à $o(r/a)$ à l'expérience. Puisque l'effet de $o\,(r_0/a_0)$ est plus important, nous n'avons pas besoin de prendre une valeur de a_0 aussi grande que celle donnée par Birks. La valeur de 3 microns pour a_0 paraît en effet excessive ([21]).

Donc finalement les formules (7) et (13) sont encore à multiplier par (15), ce qui revient à multiplier A par $o\,(r_0/a_0)$ et A uniquement.

L'effet de surface a donc pour conséquence pour les fig. 2 et 4 : 1) d'incliner la droite passant par l'origine, puisque son coefficient angulaire diminue et cela d'autant plus que l'énergie augmente, 2) d'abaisser l'horizontale représentant la saturation.

Ces deux effets augmentent pour des particules plus ionisantes, car leur range et par conséquent la valeur de $o\,(r_0/a_0)$ sont plus petits.

Le fait que l'horizontale A/B, indiquant la saturation (fig. 2) augmente cependant en réalité, indique qu'ici l'effet de la diminution de B à cause de la diminution du nombre de trous dans la bande fondamentale suivant une excitation interne croissante, est plus important que la diminution de A par l'effet de surface.

Pour des rayons gamma, les électrons ionisants sont produits à l'intérieur même du cristal. Il n'y a donc pas d'effet de surface. Pour des électrons qui bombardent le cristal par une de ses faces, il y a cependant un tel effet ([26]). Pour les rayons gamma la réponse sera donc très linéaire.

Dans la fig. 2, les électrons jouent un rôle apparemment très anormal. Cela est dû à l'effet de surface. En effet les électrons légers sont diffusés fortement par les atomes du cristal et restent ainsi toujours assez près de la surface du cristal, tandis qu'une particule alpha de même énergie, même avec un parcours plus petit, peut pénétrer plus loin dans le cristal, puisqu'elle n'est pas déviée de son chemin. D'ailleurs la diffusion des électrons augmente fortement aux très basses énergies; ainsi s'explique ce comportement apparemment anormal.

Influence de la concentration des centres de luminescence

L'inclinaison des droites correspondant à la réponse linéaire dans la fig. 5, dépend de la concentration en centres de luminescence, car le coefficient angulaire A, donné par (8) en dépend. Mais q, la probabilité d'étouffement interne, par capture des électrons dans un niveau métastable du centre de luminescence, dépend lui aussi de la concentration C de ces centres. En effet la perturbation introduite dans le niveau métastable quand un autre ion activateur est introduit dans le voisinage, lève un peu la règle de sélection qui interdit ce niveau ([12]). On peut écrire $q = q'\,\mathrm{C}$.

On obtient alors une formule de la forme :

$$\mathrm{A} = \left(\frac{1}{1 + m\,\mathrm{C}}\right)\left(\frac{r\,\mathrm{C}}{1 + s\,\mathrm{C}}\right) \qquad (16)$$

Cette formule est identique à la formule semiempirique de Kallmann ([7]). Pour C petit, elle représente une droite $\mathrm{A} = r\,\mathrm{C}$, passant par l'origine, dont le coefficient angulaire $r = e\,k\,(t_1 + f t_3 \dot{a})$ dépend uniquement de la probabilité de transfert des électrons au niveau d'émission du centre de luminescence.

Pour C grand, on a une hyperbole $\mathrm{CA} = r/ms$. La courbe réelle présente un maximum au point d'intersection des deux courbes précédentes c.-à-d. pour $\mathrm{C} = (ms)^{-1/2}$. Ces conclusions sont en accord avec les expériences, qui donnent les courbes de la fig. 7.

Ces courbes s'interprètent facilement, l'intensité lumineuse augmente d'abord rapidement et linéairement avec la concentration en centres de luminescence (ici : d'ions Tl^+) Mais plus la concentration en activateur augmente, plus les processus d'étouffement internes s'accentuent, pour produire finalement une saturation de la réponse.

Ces courbes dépendent de la nature des particules, puisque en réalité ils ne représentent pas A mais A o (r_0/a_0). Par suite le coefficient angulaire r de la droite est diminué du même facteur, ainsi que la hauteur de l'hyperbole, pour des particules plus ionisantes. L'abscisse du maximum reste cependant inchangée. Ceci est conforme aux expériences. On voit ici très nettement l'influence de l'effet de surface, puisque le terme $(fg + Qb)$ dans B qui contrecarre l'effet de surface dans la fig. 2, n'intervient pas dans A.

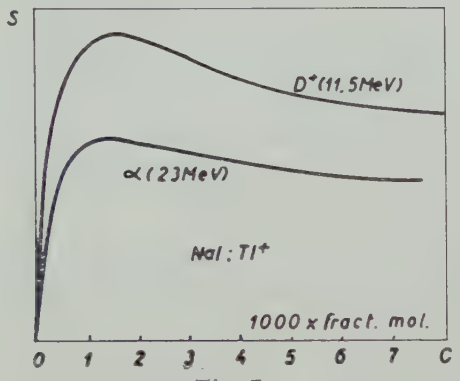


Fig. 7

REPONSE EN FONCTION DE LA CONCENTRATION DES CENTRES DE LUMINESCENCE

Enfin on voit aussi qu'il existe une concentration optimum pour avoir la meilleure réponse, ce qui explique les variations de réponse d'un cristal à l'autre, même si ceux-ci sont optiquement parfaits.

Cette même formule est valable pour des mélanges de scintillateurs organiques liquides, pour lesquels la formule semiempirique avait été déduite.

Qu'il me soit permis à la fin de cet article de remercier vivement Monsieur le professeur de Hemptinne, de m'avoir admis dans son laboratoire, et de la bienveillance avec laquelle il a suivi l'évolution de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Birks J. (1953), *Scintillation Counters*, Pergamon Press, London.
(2) Curran S. (1953), *Luminesc. and the Scint. Counter*, Butterworth sc. pub.
(3) Wright G. T., *Phys. Rev.* **96**, 569 (1954) ; *Phys. Rev.* **91**, 1282 (1953).
(4) Robinson W. H. and Jentschke W., *Phys. Rev.* **95**, 1412 (1954).
(5) Kallmann and Furst, *Phys. Rev.* **79**, 857 (1950).
(6) Birks J., *Proc. Phys. Soc. London.* A. **64**, 880 (1951).
(7) Kallmann, Furst and Bittmann, *Phys. Rev.* **87**, 83, (1952).
(8) Forster T., *Ann. Phys. Lpz.* **2**, 55 (1948).
(9) Frank and Livingstone R., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 505 (1949).
(10) Allison S. and Casson H., *Phys. Rev.* **90**, 880 (1953).
(11) Eby F. and Jentschke W., *Phys. Rev.* **96**, 911 (1954).
(12) Williams F., *Adv. in Electronics*, V, 137, (1953).
(13) Johnson P. and Williams F., *J. Chem. Phys.* **20**, 124 (1952).
(14) Seitz F., *Rev. Mod. Phys.* **18**, 384 (1946), **26**, 7, (1954).
(15) Meessen A., *Thèse de Licence*, Louvain (1955).
(16) Meessen A., *Effet de la température sur le spectre du NaI:Tl*, à paraître.
(17) Varley J., *J. of Nuclear Energy* **1**, 131 (1954).
(18) Muellhausen, Mateosian and McKeown, *Phys. Rev.* **95**, 598, (1954).
(19) Van Sciver W. and Hofstadter R., *Phys. Rev.* **97**, 1181 (1955).
(20) Milton J. and Frazer J., *Phys. Rev.* **96**, 1508 (1954).
(21) Zimmerman E. J., *Phys. Rev.* **99**, 1199 (1955).
(22) Chou C. N., *Phys. Rev.* **87**, 904 (1952),
(23) Wright G. T., *Phys. Rev.* **91**, 1282 (1953) ; *J. Sc. Instr.* **31**, 462 (1954).
(24) Taylor, Jentschke, Remley, Eby and Kruger, *Phys. Rev.* **84**, 1034 (1951).
(25) Birks J., *Phys. Rev.* **86**, 569 (1952).
(26) Birks and Brooks T., *Phys. Rev.* **94**, 1800 (1954).

Remarques concernant la purification des deutéroéthanes

PAR

R. VAN RIET

Sommaire. — Des indications sont données au sujet de certaines absorptions thylène et de deutéroéthylènes trouvées dans les spectres des deutéroéthanes.

Nous rappelons d'abord l'objet des publications parues, de 1949 1955, au sujet de l'éthane et de ses substitués deutérés.

L. G. Smith, *J. Chem. Phys.*, **17**, 139, (1949). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CH_3-CH_3.

M. de Hemptinne et R. Van Riet. *Ann. Soc. Sc. Brux.*, série I, t. XIII, 104, (1949). Etude du spectre Raman, en phase liquide, de CH_3-CH_2D.

L. R. Posey et E. F. Barker, *J. Chem. Phys.*, **17**, 182, (1949). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CH_3-CH_2D.

R. Van Riet et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*; 177, (1950). Etude du spectre Raman, en phase liquide, de CD_3-CD_2H.

G. E. Hansen et E. M. Dennison, *J. Chem. Phys.*, **20**, 313, (1952). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion et du spectre Raman de CH_3-CH_3 et CD_3-CD_3. Fonction potentielle de l'éthane.

R. Van Riet et M. de Hemptinne, *Acad. Roy. Belg.*, Série 5, tome XXXIX, 273, (1953). Etude du spectre Raman en phase liquide et en phase vapeur de CH_3-CH_2D, CH_2D-CH_2D, CD_2H-CD_2H, CD_3-CD_2H. Etude du spectre infrarouge, à dispersion moyenne, des mêmes corps.

R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, t. LXVII, I, 105, (1953). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CH_2D-CH_2D.

R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, t. LXVII, I, 296, (1953). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CD_2H-CD_2H.

9. R. Van Riet et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, t. LXVIII, I, 93, (1954). Etude d'un nouvel échantillon de CH_2D-CH_2D. Spectre Raman en phase liquide et en phase vapeur.
10. R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, t. LXVIII, I, 108, (1954). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CD_3-CD_2H.
11. R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, t. LXVIII, I, 193, (1954). Etude du spectre infrarouge à grande dispersion de CH_3-CH_2D.
12. R. Van Riet, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, série 5, t. XLI, 188, (1955). Spectre Raman, en phase liquide et en phase vapeur, de CH_3-CD_3. Spectre infrarouge, à dispersion moyenne, de ce produit.

En 1949, Posey et Barker (cfr. réf. 3) signalent la présence d'une bande intense, à 950 cm^{-1}, observée dans le spectre infrarouge à grande dispersion de CH_3-CH_2D. Ils l'attribuent à un reste d'éthylène, CH_2=CH_2, demeuré dans l'appareil de préparation.

De notre côté, nous observons certaines bandes parasites dans les spectres infrarouges de CH_3-CH_2D, CH_2D-CH_2D, CD_2H-CD_2H, CD_3-CD_2H enregistrés au spectrographe Perkin Elmer (cfr. réf. 6). Ainsi, par exemple, les bandes 943 et 950 cm^{-1} s'observent, à dispersion moyenne, dans les spectres infrarouges de CH_3-CH_2D et de CH_2D-CH_2D.

Afin d'éliminer les absorptions causées par les traces d'éthylène et de deutéroéthylènes, nous avons purifié tous les deutéroéthanes en les faisant passer à travers du brome liquide, convenablement refroidi. Les spectres infrarouges, obtenus après cette purification ont été donnés à l'occasion de notre travail sur CH_3-CD_3 (cfr. réf. 12). Il y a lieu de noter que les spectres infrarouges avaient été obtenus à grande dispersion (cfr. réf. 7, 8, 10,11), avant la purification des produits : de nouveaux enregistrements seront nécessaires pour déterminer exactement, dans la région des basses fréquences, les structures de rotation des bandes propres aux éthanes.

La présence d'éthylènes dans les éthanes est particulièrement gênante parce que le pouvoir absorbant des éthylènes est grand par rapport à celui des éthanes. Par contre, dans le spectre Raman des éthanes, les traces d'éthylènes se remarquent uniquement par les fréquences des vibrations de valence C=C dans la région 1600 cm^{-1}; celles-ci apparaissent faiblement.

La formation d'éthylènes dans la préparation des éthanes pourrait s'expliquer, soit par dismutation, soit par mécanisme ionique. En effet, on interprète la réaction du réactif de Grignard, soit par l'intervention de radicaux C_2H_5 (dismutation), soit par l'intervention de carbanions $C_2H_5^-$ (mécanisme ionique).

Les planches 1, 2 et 3 reproduisent les régions les plus importantes des spectres infrarouges de CH_3-CH_3, CH_3-CH_2D, CH_2D-CH_2D et CD_2H-CD_2H, obtenus au spectrographe Perkin Elmer, avant et après la purification de ces produits par le brome.

Note

Nous prions le lecteur de bien vouloir lire (cfr. réf. 7) les valeurs suivantes des moments principaux d'inertie de CH_2D-CH_2D, type C_2 :

$I_x = 14.137181 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; A = 1.979638 cm^{-1}
$I_y = 49.207897 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; C = 0.568740 cm^{-1}
$I_z = 47.465755 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; B = 0.589615 cm^{-1}

De même, (cfr. réf. 8), les moments principaux d'inertie de CD_2H-CD_2H, type C_2, sont :

$I_x = 17.750347 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; A = 1.576673 cm^{-1}
$I_y = 53.569660 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; B = 0.522432 cm^{-1}
$I_z = 55.420650 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; C = 0.504983 cm^{-1}

Enfin, (cfr. réf. 10) les moments principaux d'inertie de CD_3-CD_2H sont :

$I_x = 19.661097 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; A = 1.423455 cm^{-1}
$I_y = 58.541574 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; C = 0.478062 cm^{-1}
$I_z = 56.583719 \times 10^{-40}$ gr/cm^2; B = 0.494603 cm^{-1}

Université de Louvain,
Laboratoire de Physique nucléaire et moléculaire.

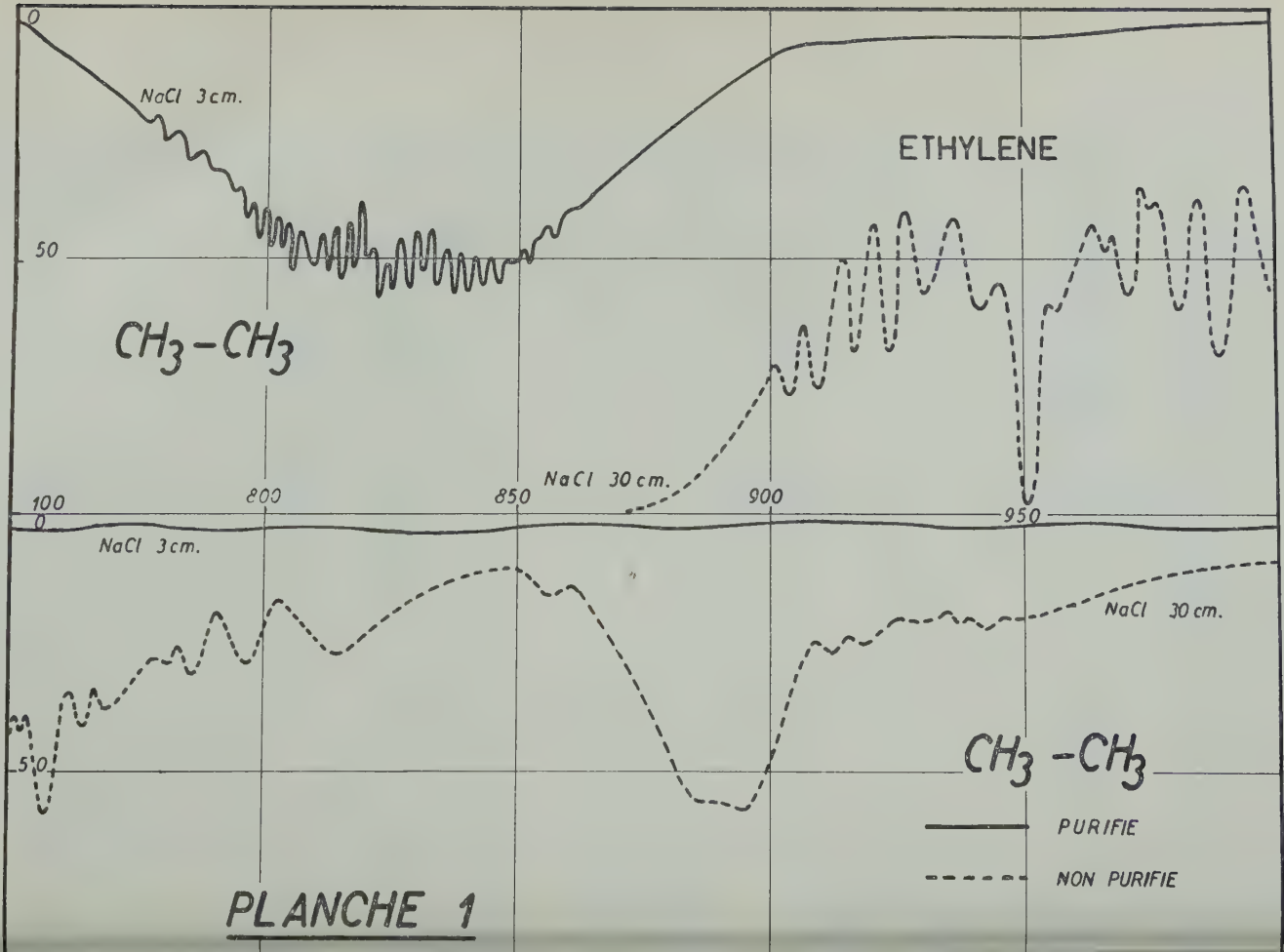
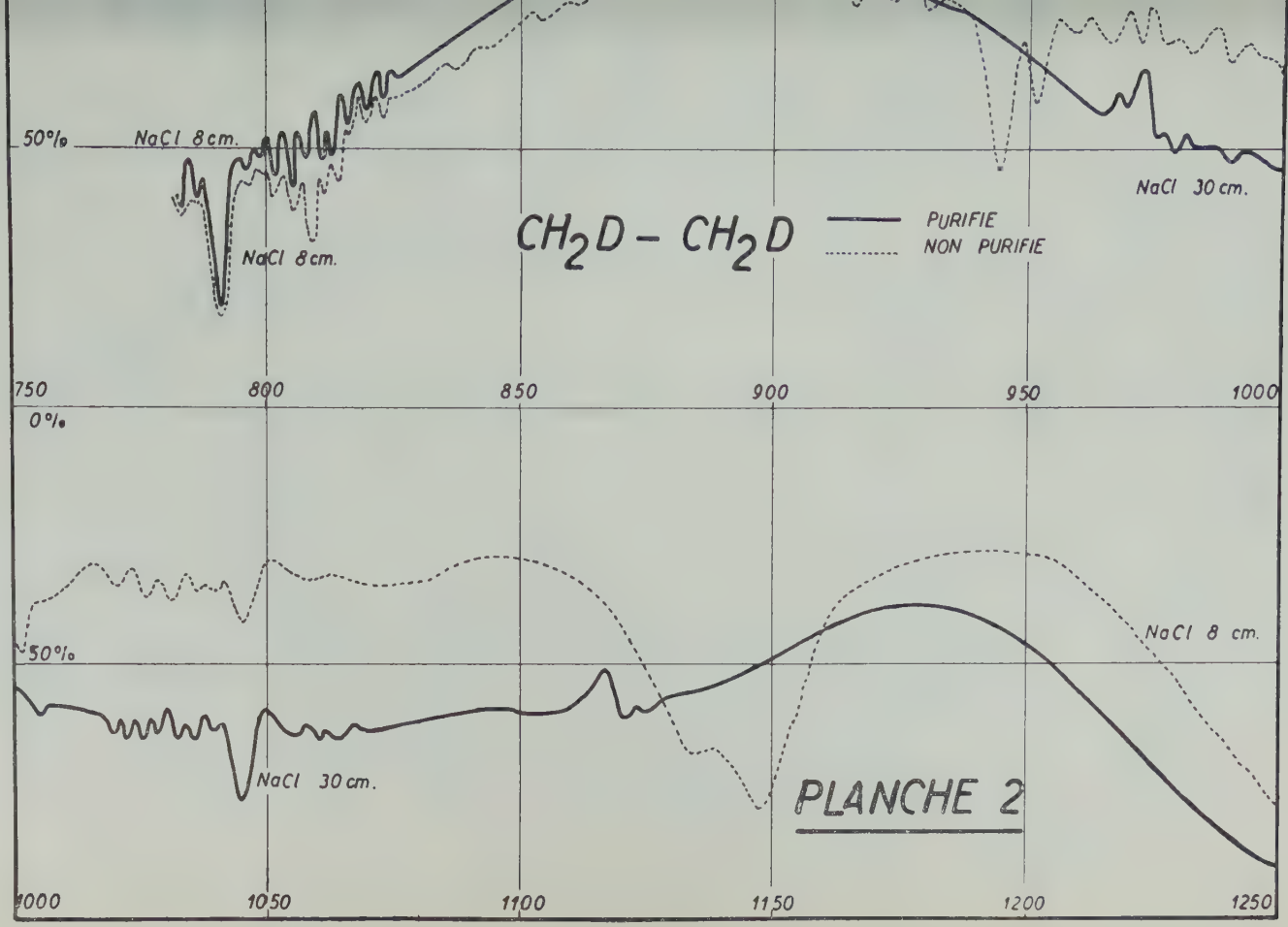
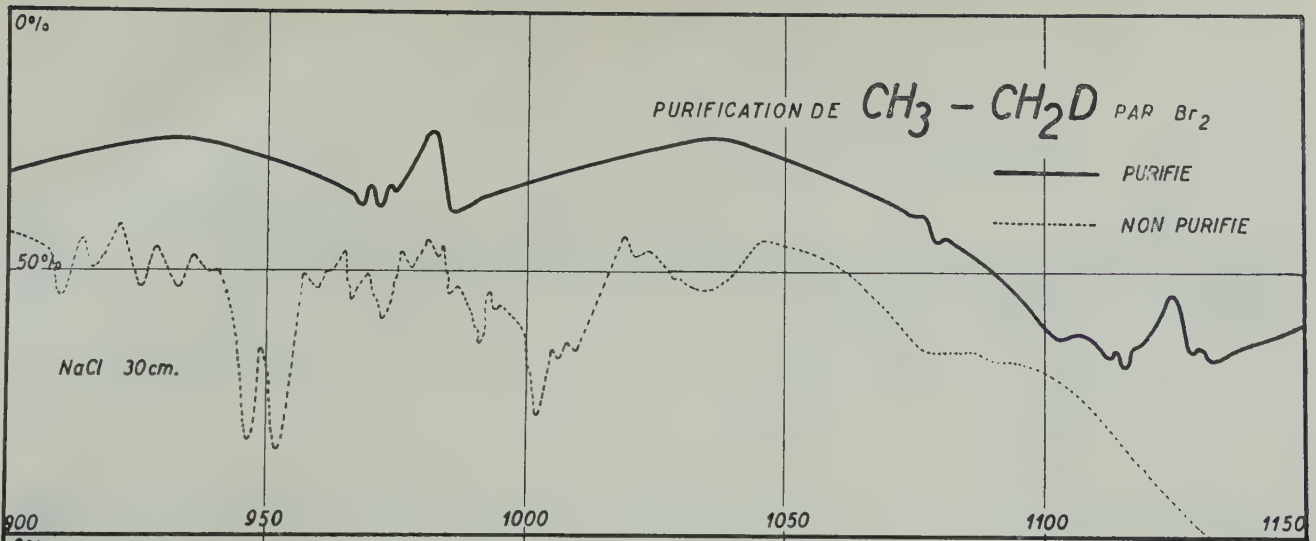

0
NaCl 3cm.
ETHYLENE
50
CH_3-CH_3
100
800
850
NaCl 30 cm.
900
950
0
NaCl 3cm.
NaCl 30 cm.
510
CH_3-CH_3
PURIFIE
NON PURIFIE

PLANCHE 1


50%
NaCl 8 cm.
NaCl 8 cm.
NaCl 30 cm.
$CH_2D - CH_2D$
PURIFIE
NON PURIFIE
750
800
850
900
950
1000
0%
50%
NaCl 8 cm.
NaCl 30 cm.
PLANCHE 2
1000
1050
1100
1150
1200
1250


0%
PURIFICATION DE $CH_3 - CH_2D$ PAR Br_2
PURIFIE
NON PURIFIE
50%
NaCl 30cm.
900
950
1000
1050
1100
1150

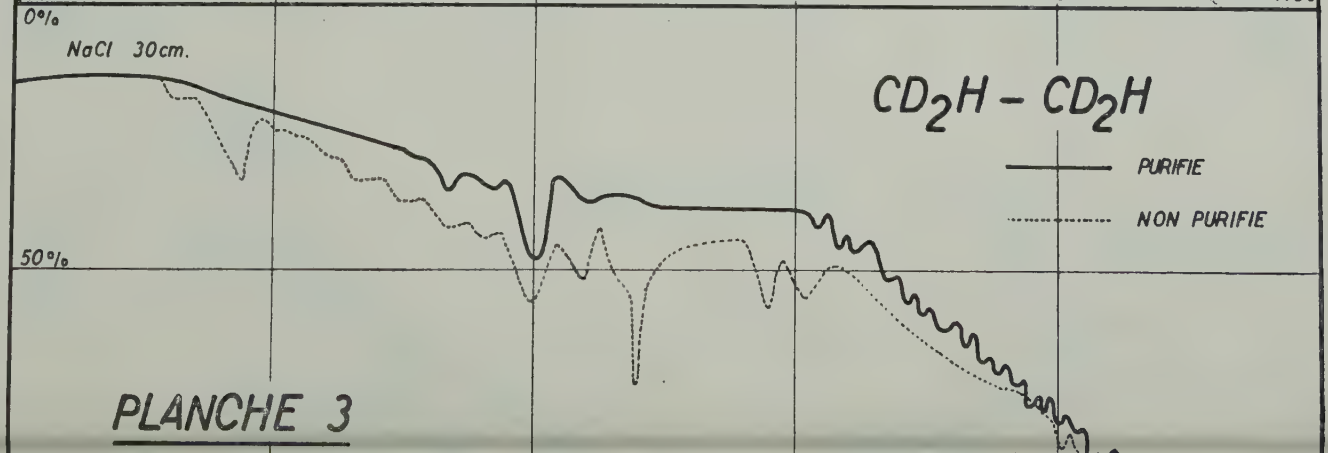

0%
NaCl 30cm.
$CD_2H - CD_2H$
PURIFIE
NON PURIFIE
50%

PLANCHE 3

Tables of Integrals

$$A_n(\alpha) = \int_1^\infty \lambda^n e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda \text{ and } F_n(\alpha) = \int_1^\infty Q_0(\lambda)\, \lambda^n e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda$$

BY

A. RAHMAN

Rosen's tables (1) of the two functions $A_n(\alpha)$ and $F_n(\alpha)$ have been widely used in computing wave functions and energies for diatomic molecules. The tables of Kotani, Amemiya and Simose (2) cover a wider range of parametric values for these and many other functions; unfortunately these are not easily available now, and it will be most helpful if the authors undertake a republication of their tables.

While working on the wave functions for the hydrogen molecule it was felt that a smaller step of the parameter α is worthwhile; moreover in the computation of the integrals $H_r(m, n; \alpha)$ (see James and Coolidge (3) for the notation) as one rises into higher values of r there is a serious loss of the number of significant places because $H_r(m, n; \alpha)$ turns out to be the difference of two nearly equal quantities; hence it is advisable to start off with the basic integrals $A_n(\alpha)$ and $F_n(\alpha)$ correct to a larger number of significant places so that in the calculation of $H_r(m, n; \alpha)$, inspite of the loss of several places, the resulting figure is still good to five or six significant figures. The tenth figure in the tables given here is the one corrected with the computed eleventh and twelfth figures.

The tabulation for both $A_n(\alpha)$ and $F_n(\alpha)$ has been made for $n = 0, 1, \ldots, 10$ and $\alpha = 0.1$ to 3.0 with $\Delta\alpha = 0.1$. A further extension to $\alpha = 10.0$ is contemplated with the same $\Delta\alpha$.

The necessary formulae, given by Rosen (1), are,

$$A_n(\alpha) = e^{-\alpha}/\alpha + n/\alpha\, A_{n-1}(\alpha)$$

$$F_n(\alpha) = F_{n-2}(\alpha) + 1/\alpha\, [n\, F_{n-1}(\alpha) - (n-2)\, F_{n-3}(\alpha) - A_{n-2}(\alpha)]$$

$$F_0(\alpha) = (C + ln\, 2\alpha)\ e^{-\alpha}/2\alpha - E\,i\,(-2\alpha)\ e^{\alpha}/2\alpha$$

$$F_1(\alpha) = (C + ln\, 2\alpha)\ e^{-\alpha}/\alpha + (1-\alpha)/\alpha\ F_0(\alpha)$$

$C = 0.57721,56649,01532$ and $-E\,i\,(-x) = \int_n e^{-t}/t\, dt$

$A_n(\alpha)$

α \ n	0	1	2	3	4	5
0.1	9.048,374,180 x 1	9.953,211,598 x 10	1.999,690,694 x 10^3	5.999,976,919 x 10^4	2.399,999,816 x 10^6	1.199,999,998 x 10^8
0.2	4.093,653,765	2.456,192,259 x 10	2.497,128,797 x 10^2	3.749,786,849 x 10^3	7.499,983,064 x 10^4	1.874,999,860 x 10^6
0.3	2.469,394,069	1.070,070,763 x 10	7.380,744,495 x 10	7.405,438,436 x 10^2	9.876,387,308 x 10^3	1.646,089,245 x 10^5
0.4	1.675,800,115	5.865,300,403 x 1	3.100,230,213 x 10	2.341,930,661 x 10^2	2.343,606,461 x 10^3	2.929,675,656 x 10^4
0.5	1.213,061,319	3.639,183,958	1.576,979,715 x 10	9.583,184,423 x 10	7.678,678,152 x 10^2	7.679,891,213 x 10^3
0.6	9.146,860,602 x 10^{-1}	2.439,162,827 x 1	9.045,228,817 x 1	4.614,083,015 x 10	3.085,202,204 x 10^2	2.571,916,522 x 10^3
0.7	7.094,075,768	1.722,846,972 x 1	5.631,827,498	2.484,581,114 x 10	1.426,854,712 x 10^2	1.019,891,345 x 10^3
0.8	5.616,612,051	1.263,737,712 x 1	3.721,005,484	1.451,543,177 x 10	7.313,882,006 x 10	4.576,792,866 x 10^2
0.9	4.517,440,664	9.536,819,179 x 10^{-1}	2.571,037,217 x 1	9.021,868,124 x 1	4.054,893,573 x 10	2.257,236,092 x 10^2
1.0	3.678,794,412	7.357,588,823	1.839,397,206 x 1	5.386,071,059	2.391,216,368 x 10	1.199,286,978 x 10^2
1.1	3.026,100,761	5.777,101,453	1.352,992,158 x 1	3.992,588,690	1.482,111,440 x 10	6.767,131,191 x 10
1.2	2.509,951,766	4.601,578,238	1.017,924,833 x 1	2.795,807,334	9.570,353,122 x 1	4.012,746,652 x 10
1.3	2.096,398,408	3.709,012,568	7.802,571,589 x 10^{-1}	2.010,233,284 x 1	6.394,973,024	2.480,568,993 x 10
1.4	1.761,406,885	3.019,554,661	6.075,056,400	1.477,938,489 x 1	4.398,822,085	1.588,621,956 x 10
1.5	1.487,534,401	2.479,224,002	4.793,166,403	1.107,386,721 x 1	3.101,784,695	1.048,803,576 x 10
1.6	1.261,853,237	2.050,511,511	3.824,992,626	8.433,714,411 x 10^{-1}	2.234,613,927 x 1	7.109,353,844 x 1
1.7	1.074,608,965	1.706,731,886	3.082,528,830	6.514,365,725	1.640,252,832 x 1	4.931,733,931
1.8	9.183,271,568 x 10^{-2}	1.428,508,911 x 10^{-1}	2.505,559,280	5.094,259,290	1.223,890,336 x 1	3.491,528,092
1.9	7.872,032,591	1.201,520,764 x 10^{-1}	2.051,961,958	4.027,143,193	9.265,399,454 x 10^{-1}	2.516,983,340 x 1
2.0	6.766,764,162	1.015,014,624 x 10^{-1}	1.691,691,040	3.214,212,977	7.105,102,370	1.843,943,234 x 1
2.1	5.831,258,488	8.608,048,245 x 10^{-2}	1.402,939,967 x 10^{-1}	2.587,325,802	5.511,365,472	1.370,542,459 x 1
2.2	5.036,507,198	7.325,828,652	1.169,635,143 x 10^{-1}	2.098,607,734	4.319,301,144	1.032,024,423 x 1
2.3	4.359,080,162	6.254,332,406	9.797,630,080 x 10^{-2}	1.713,859,766 x 10^{-1}	3.416,533,696	7.863,155,181 x 10^{-1}
2.4	3.779,914,720	5.354,879,187	8.242,314,043	1.408,280,727 x 10^{-1}	2.725,126,018	6.055,337,342
2.5	3.283,399,945	4.596,759,923	6.960,807,883	1.163,636,940 x 10^{-1}	2.190,159,099	4.708,558,193
2.6	2.856,676,085	3.955,397,556	5.899,289,667	9.663,548,778 x 10^{-2}	1.772,367,420 x 10^{-1}	3.694,066,494
2.7	2.489,093,064	3.410,979,385	5.015,744,460	8.062,142,465	1.443,300,783 x 10^{-1}	2.921,688,534
2.8	2.171,787,951	2.947,426,505	4.277,092,597	6.754,387,162	1.182,091,247 x 10^{-1}	2.323,056,022

7.205,000,000 x 10^{7}	5.040,000,000 x 10^{7}	4.032,000,000 x 10^{7}	3.629,600,000 x 10^{7}		
5.624,999,988 x 10^{7}	1.968,750,000 x 10^{9}	7.875,000,000 x 10^{10}	3.543,750,000 x 10^{12}	1.771,875,000 x 10^{14}	0.2
3.292,180,360 x 10^{6}	7.681,755,820 x 10^{7}	2.048,468,221 x 10^{9}	6.145,404,664 x 10^{10}	2.048,468,221 x 10^{12}	0.3
4.394,530,242 x 10^{5}	7.690,429,600 x 10^{6}	1.538,085,937 x 10^{8}	3.460,693,359 x 10^{9}	8.651,733,398 x 10^{10}	0.4
9.215,990,762 x 10^{4}	1.290,239,920 x 10^{6}	2.064,383,993 x 10^{7}	3.715,891,199 x 10^{8}	7.431,782,400 x 10^{9}	0.5
2.572,007,991 x 10^{4}	3.000,685,136 x 10^{5}	4.000,914,430 x 10^{6}	6.001,371,736 x 10^{7}	1.000,228,624 x 10^{9}	0.6
8.742,635,221 x 10^{3}	8.742,706,162 x 10^{4}	9.991,671,279 x 10^{5}	1.284,643,521 x 10^{7}	1.835,205,037 x 10^{8}	0.7
3.433,156,310 x 10^{3}	3.004,067,938 x 10^{4}	3.004,073,554 x 10^{5}	3.379,583,310 x 10^{6}	4.224,479,134 x 10^{7}	0.8
1.505,275,806 x 10^{3}	1.170,815,245 x 10^{4}	1.040,729,180 x 10^{5}	1.040,729,632 x 10^{6}	1.156,366,302 x 10^{7}	0.9
7.199,400,664 x 10^{2}	5.039,948,344 x 10^{3}	4.031,935,463 x 10^{4}	3.623,799,596 x 10^{5}	3.628,799,964 x 10^{6}	1.0
3.694,183,568 x 10^{2}	2.351,149,381 x 10^{3}	1.709,957,447 x 10^{4}	1.339,059,119 x 10^{5}	1.271,872,229 x 10^{6}	1.1
2.008,893,278 x 10^{2}	1.172,099,574 x 10^{3}	7.814,248,154 x 10^{3}	5.860,711,215 x 10^{4}	4.883,928,523 x 10^{5}	1.2
1.146,374,395 x 10^{2}	6.178,112,373 x 10^{2}	3.802,124,346 x 10^{3}	2.632,261,311 x 10^{4}	2.024,818,490 x 10^{5}	1.3
6.825,993,881 x 10	3.414,758,347 x 10^{2}	1.931,466,625 x 10^{3}	1.254,531,873 x 10^{4}	8.960,959,564 x 10^{4}	1.4
4.210,083,647	1.956,196,036 x 10^{2}	1.048,786,640 x 10^{3}	6.292,968,591 x 10^{3}	4.195,260,602 x 10^{4}	1.5
2.678,626,224 x 10	1.173,160,826 x 10^{2}	5.867,065,984 x 10^{2}	3.300,350,802 x 10^{3}	2.062,731,870 x 10^{4}	1.6
1.751,358,065 x 10	7.222,220,476 x 10	3.399,766,598 x 10^{2}	1.799,983,895 x 10^{3}	1.058,824,802 x 10^{4}	1.7
1.173,025,969 x 10	4.570,950,929	2.032,452,073 x 10^{2}	1.016,317,869 x 10^{3}	5.646,302,213 x 10^{3}	1.8
8.027,088,768 x 1	2.965,220,526 x 10^{1}	1.249,301,109 x 10^{2}	5.918,529,299 x 10^{2}	3.115,094,141 x 10^{3}	1.9
5.599,497,344	1.966,590,835 x 10	7.873,130,102 x 10	3.543,585,222 x 10^{2}	1.771,850,279 x 10^{3}	2.0
3.974,148,183	1.330,547,319 x 10	5.074,582,951	2.175,404,391 x 10^{2}	1.035,965,165 x 10^{3}	2.1
2.364,977,135	9.166,201,410 x 1	3.338,200,656 x 10	1.366,131,192 x 10^{2}	6.210,190,387 x 10^{2}	2.2
2.094,848,675 x 1	6.419,217,204	2.237,130,281 x 10	8.758,347,138 x 10	3.808,412,923 x 10^{2}	2.3
1.551,633,483 x 1	4.563,396,805	1.524,912,183 x 10	5.722,200,602	2.384,628,242 x 10^{2}	2.4
1.152,911,966 x 1	3.288,987,594	1.055,759,401 x 10	3.804,017,244	1.521,935,238 x 10^{2}	2.5
8.810,436,441 x 10^{-1}	2.490,607,341 x 1	7.415,050,887 x 1	2.563,605,060 x 10	9.885,953,061 x 10	2.6
6.741,550,492	1.772,700,318 x 1	5.277,336,316	1.761,601,198 x 10	6.526,937,976	2.7
5.205,870,270	1.323,185,447 x 1	3.802,247,728	1.224,322,843 x 10	4.374,753,371	2.8
4.054,080,996	9.975,447,991 x 10^{-1}	2.770,821,245 x 1	8.618,073,943 x 1	2.973,646,988 x 10	2.9
3.161,364,904	7.590,308,338	2.040,677,913 x 1	6.138,629,428	2.047,869,378 x 10	3.0

$F_n(\alpha)$

α \ n	0	1	2	3	4	5
0.1	2.086,222,556 x 10^{0}	9.436,069,867 x 10^{0}	1.003,238,781 x 10^{2}	2.002,969,027 x 10^{3}	6.003,345,662 x 10^{4}	2.400,668,392 x 10^{6}
0.2	1.450,694,574 x 10^{0}	4.414,722,371 x 10^{0}	2.512,964,945 x 10^{1}	2.512,963,783 x 10^{2}	3.758,345,594 x 10^{3}	7.508,405,724 x 10^{4}
0.3	1.104,218,544 x 10^{0}	2.740,453,110 x 10^{0}	1.114,259,238 x 10^{1}	7.481,662,301 x 10^{1}	7.444,030,620 x 10^{2}	9.901,628,921 x 10^{3}
0.4	8.758,716,030 x 10^{-1}	1.907,161,493 x 10^{0}	6.222,178,781 x 10^{0}	3.172,057,234 x 10^{1}	2.363,863,393 x 10^{2}	2.354,400,808 x 10^{3}
0.5	7.118,019,571 x 10^{-1}	1.411,999,953 x 10^{0}	3.933,679,131 x 10^{0}	1.631,210,291 x 10^{1}	9.724,290,828 x 10^{1}	7.734,754,225 x 10^{2}
0.6	5.879,015,469 x 10^{-1}	1.086,672,473 x 10^{0}	2.685,666,358 x 10^{0}	9.469,896,974 x 10^{0}	4.712,068,991 x 10^{1}	3.118,125,975 x 10^{2}
0.7	4.912,578,139 x 10^{-1}	8.587,161,833 x 10^{-1}	1.931,293,228 x 10^{0}	5.972,680,323 x 10^{0}	2.556,195,241 x 10^{1}	1.447,870,678 x 10^{2}
0.8	4.141,429,311 x 10^{-1}	6.917,181,836 x 10^{-1}	1.441,361,884 x 10^{0}	3.999,474,444 x 10^{0}	1.505,818,179 x 10^{1}	7.456,371,385 x 10^{1}
0.9	3.515,684,529 x 10^{-1}	5.653,460,512 x 10^{-1}	1.105,955,160 x 10^{0}	2.801,585,060 x 10^{0}	9.444,411,739 x 10^{0}	4.155,972,405 x 10^{1}
1.0	3.001,328,717 x 10^{-1}	4.673,403,737 x 10^{-1}	8.669,341,778 x 10^{-1}	2.032,251,153 x 10^{0}	6.221,860,837 x 10^{0}	2.465,468,175 x 10^{1}
1.1	2.574,188,228 x 10^{-1}	3.898,647,069 x 10^{-1}	6.911,636,753 x 10^{-1}	1.515,648,396 x 10^{0}	4.263,774,595 x 10^{0}	1.538,182,409 x 10^{1}
1.2	2.216,521,355 x 10^{-1}	3.276,747,555 x 10^{-1}	5.586,140,809 x 10^{-1}	1.156,034,992 x 10^{0}	3.017,668,725 x 10^{0}	1.000,327,999 x 10^{1}
1.3	1.914,968,514 x 10^{-1}	2.771,290,862 x 10^{-1}	4.565,878,757 x 10^{-1}	8.981,794,854 x 10^{-1}	2.193,666,807 x 10^{0}	6.735,361,887 x 10^{0}
1.4	1.659,257,979 x 10^{-1}	2.356,216,669 x 10^{-1}	3.767,134,016 x 10^{-1}	7.086,637,676 x 10^{-1}	1.630,932,042 x 10^{0}	4.670,507,708 x 10^{0}
1.5	1.441,355,155 x 10^{-1}	2.012,400,013 x 10^{-1}	3.132,865,571 x 10^{-1}	5.664,411,718 x 10^{-1}	1.235,931,920 x 10^{0}	3.321,383,310 x 10^{0}
1.6	1.254,884,286 x 10^{-1}	1.725,505,463 x 10^{-1}	2.623,197,842 x 10^{-1}	4.577,960,293 x 10^{-1}	9.520,506,355 x 10^{-1}	2.414,014,394 x 10^{0}
1.7	1.094,724,042 x 10^{-1}	1.484,592,455 x 10^{-1}	2.209,180,480 x 10^{-1}	3.735,230,992 x 10^{-1}	7.438,127,673 x 10^{-1}	1.788,154,346 x 10^{0}
1.8	9.567,177,310 x 10^{-2}	1.284,181,276 x 10^{-1}	1.870,070,729 x 10^{-1}	3,072,839,912 x 10^{-1}	5.883,091,738 x 10^{-1}	1.346,783,281 x 10^{0}
1.9	8.374,612,568 x 10^{-2}	1.108,611,069 x 10^{-1}	1.590,102,772 x 10^{-1}	2.546,151,224 x 10^{-1}	4.703,482,141 x 10^{-1}	1.029,349,817 x 10^{0}
2.0	7.341,430,812 x 10^{-2}	9.615,883,869 x 10^{-2}	1.357,395,260 x 10^{-1}	2.123,101,424 x 10^{-1}	3.796,164,201 x 10^{-1}	7.970,312,549 x 10^{-1}
2.1	6.444,345,483 x 10^{-2}	8.358,633,026 x 10^{-2}	1.162,815,861 x 10^{-1}	1.780,248,164 x 10^{-1}	3.089,637,806 x 10^{-1}	6.243,303,234 x 10^{-1}
2.2	5.663,779,524 x 10^{-2}	7.279,928,446 x 10^{-2}	9.992,574,939 x 10^{-2}	1.500,179,960 x 10^{-1}	2.533,393,407 x 10^{-1}	4.941,355,787 x 10^{-1}
2.3	4.983,350,946 x 10^{-2}	6.351,654,491 x 10^{-2}	8.611,276,520 x 10^{-2}	1.269,780,502 x 10^{-1}	2.091,139,869 x 10^{-1}	3.947,370,339 x 10^{-1}
2.4	4.389,209,536 x 10^{-2}	5.550,688,153 x 10^{-2}	7.439,818,534 x 10^{-2}	1.079,042,436 x 10^{-1}	1.736,398,815 x 10^{-1}	3.179,779,013 x 10^{-1}
2.5	3.869,611,200 x 10^{-2}	4.857,891,516 x 10^{-2}	6.442,564,434 x 10^{-2}	9.202,420,388 x 10^{-2}	1.449,580,069 x 10^{-1}	2.580,839,668 x 10^{-1}
2.6	3.414,559,453 x 10^{-2}	4.257,334,498 x 10^{-2}	5.590,710,573 x 10^{-2}	7.873,555,502 x 10^{-2}	1.216,004,263 x 10^{-1}	2.109,068,344 x 10^{-1}
2.7	3.015,516,263 x 10^{-2}	3.735,689,060 x 10^{-2}	4.860,807,024 x 10^{-2}	6.756,402,180 x 10^{-2}	1.024,543,152 x 10^{-1}	1.734,254,813 x 10^{-1}
2.8	2.665,166,614 x 10^{-2}	3.281,752,371 x 10^{-2}	4.233,636,896 x 10^{-2}	5.813,294,360 x 10^{-2}	8.666,701,218 x 10^{-2}	1.434,122,587 x 10^{-1}
2.9	2.357,235,631 x 10^{-2}	2.886,268,296 x 10^{-2}	3.683,358,126 x 10^{-2}	5.011,080,991 x 10^{-2}	7.337,876,255 x 10^{-2}	1.189,255,441 x 10^{-1}

$1.200,200,201 \times 10^{8}$	$7.200,800,401 \times 10^{9}$	$5.040,400,120 \times 10^{11}$	$4.032,240,048 \times 10^{13}$	$3.628,968,024 \times 10^{15}$	0.1
$1.876,254,982 \times 10^{6}$	$5.627,505,049 \times 10^{7}$	$1.969,375,754 \times 10^{9}$	$7.876,876,504 \times 10^{10}$	$3.544,406,626 \times 10^{12}$	0.2
$1.648,581,355 \times 10^{5}$	$3.295,488,324 \times 10^{6}$	$7.687,257,766 \times 10^{7}$	$2.049,567,601 \times 10^{9}$	$6.147,968,552 \times 10^{10}$	0.3
$2.937,617,659 \times 10^{4}$	$4.402,407,705 \times 10^{5}$	$7.700,243,014 \times 10^{6}$	$1.539,555,515 \times 10^{8}$	$3.463,262,731 \times 10^{9}$	0.4
$7.712,715,524 \times 10^{3}$	$9.241,928,125 \times 10^{4}$	$1.292,819,695 \times 10^{6}$	$2.067,471,594 \times 10^{7}$	$3.720,207,501 \times 10^{8}$	0.5
$2.587,913,651 \times 10^{3}$	$2.582,493,858 \times 10^{4}$	$3.009,355,022 \times 10^{5}$	$4.009,550,956 \times 10^{6}$	$6.011,426,154 \times 10^{7}$	0.6
$1.028,627,973 \times 10^{3}$	$8.791,493,784 \times 10^{3}$	$8.777,233,175 \times 10^{4}$	$1.002,110,820 \times 10^{6}$	$1,287,578,536 \times 10^{7}$	0.7
$4.628,651,383 \times 10^{2}$	$3.458,420,930 \times 10^{3}$	$3.019,640,120 \times 10^{4}$	$3.015,670,152 \times 10^{5}$	$3.389,690,688 \times 10^{6}$	0.8
$2.290,033,765 \times 10^{2}$	$1.519,424,133 \times 10^{3}$	$1.178,540,217 \times 10^{4}$	$1.045,832,502 \times 10^{5}$	$1.044,678,947 \times 10^{6}$	0.9
$1.221,087,830 \times 10^{2}$	$7.283,781,610 \times 10^{2}$	$5.081,265,914 \times 10^{3}$	$4.056,506,156 \times 10^{4}$	$3.645,849,016 \times 10^{5}$	1.0
$6.917,944,417 \times 10^{1}$	$3.747,144,825 \times 10^{2}$	$2.374,639,498 \times 10^{3}$	$1.722,594,129 \times 10^{4}$	$1.407,038,418 \times 10^{5}$	1.1
$4.120,532,443 \times 10^{1}$	$2.043,544,974 \times 10^{2}$	$1.186,145,300 \times 10^{3}$	$7.883,330,213 \times 10^{3}$	$5.900,632,696 \times 10^{4}$	1.2
$2.559,711,324 \times 10^{1}$	$1.170,474,916 \times 10^{2}$	$6.265,742,842 \times 10^{2}$	$3.841,799,436 \times 10^{3}$	$2.653,387,389 \times 10^{4}$	1.3
$1.648,062,425 \times 10^{1}$	$6.990,157,198 \times 10^{1}$	$3.471,446,177 \times 10^{2}$	$1.975,231,111 \times 10^{3}$	$1.266,259,598 \times 10^{4}$	1.4
$1.094,309,891 \times 10^{1}$	$4.327,738,130 \times 10^{1}$	$2.004,030,016 \times 10^{2}$	$1.063,547,860 \times 10^{3}$	$6.360,718,277 \times 10^{3}$	1.5
$7.463,480,336 \times 10^{0}$	$2.764,823,866 \times 10^{1}$	$1.199,107,063 \times 10^{2}$	$5.961,706,812 \times 10^{2}$	$3.341,044,645 \times 10^{3}$	1.6
$5.211,213,267 \times 10^{0}$	$1.815,738,676 \times 10^{1}$	$7.404,449,994 \times 10^{1}$	$3.462,160,937 \times 10^{2}$	$1.825,176,961 \times 10^{3}$	1.7
$3.714,794,387 \times 10^{0}$	$1.221,927,592 \times 10^{1}$	$4.701,659,832 \times 10^{1}$	$2.074,616,756 \times 10^{2}$	$1.032,359,566 \times 10^{3}$	1.8
$2.697,242,144 \times 10^{0}$	$8.404,071,184 \times 10^{0}$	$3.060,744,309 \times 10^{1}$	$1.278,430,646 \times 10^{2}$	$6.023,274,252 \times 10^{2}$	1.9
$1.990,834,782 \times 10^{0}$	$5.893,940,323 \times 10^{0}$	$2.037,575,364 \times 10^{1}$	$8.078,395,579 \times 10^{1}$	$3.613,541,208 \times 10^{2}$	2.0
$1.491,223,841 \times 10^{0}$	$4.206,809,146 \times 10^{0}$	$1.384,091,101 \times 10^{1}$	$5,221,831,341 \times 10^{1}$	$2.223,089,260 \times 10^{2}$	2.1
$1.131,889,965 \times 10^{0}$	$3.059,730,410 \times 10^{0}$	$9.575,550,270 \times 10^{0}$	$3.445,551,280 \times 10^{1}$	$1.399,243,131 \times 10^{2}$	2.2
$8.694,864,361 \times 10^{-1}$	$2.244,528,164 \times 10^{0}$	$6.735,988,364 \times 10^{0}$	$2.316,551,644 \times 10^{1}$	$8.992,191,716 \times 10^{1}$	2.3
$6.751,973,114 \times 10^{-1}$	$1.673,247,917 \times 10^{0}$	$4.811,231,665 \times 10^{0}$	$1.584,462,583 \times 10^{1}$	$5.889,921,215 \times 10^{1}$	2.4
$5.295,144,371 \times 10^{-1}$	$1.262,462,049 \times 10^{0}$	$3.484,826,688 \times 10^{0}$	$1.100,960,270 \times 10^{1}$	$3.926,032,132 \times 10^{1}$	2.5
$4.190,089,049 \times 10^{-1}$	$9.630,812,781 \times 10^{-1}$	$2.556,764,895 \times 10^{0}$	$7.762,009,886 \times 10^{0}$	$2.659,537,941 \times 10^{1}$	2.6
$3.342,938,420 \times 10^{-1}$	$7.421,723,200 \times 10^{-1}$	$1.898,245,924 \times 10^{0}$	$5.546,415,323 \times 10^{0}$	$1.828,692,680 \times 10^{1}$	2.7
$2.687,143,884 \times 10^{-1}$	$5.772,908,500 \times 10^{-1}$	$1.424,880,896 \times 10^{0}$	$4.012,912,956 \times 10^{0}$	$1.274,936,484 \times 10^{1}$	2.8
$2.174,904,799 \times 10^{-1}$	$4.529,168,337 \times 10^{-1}$	$1.080,488,239 \times 10^{0}$	$2.937,198,211 \times 10^{0}$	$9.003,376,581 \times 10^{0}$	2.9
$1.771,468,091 \times 10^{-1}$	$3.581,725,044 \times 10^{-1}$	$8.271,063,344 \times 10^{-1}$	$2.173,138,675 \times 10^{0}$	$6.435,549,269 \times 10^{0}$	3.0

An extremely useful check on the tabulated values are the following expressions:

$$A_n(\alpha + \Delta\alpha) = A_n(\alpha) - (\Delta\alpha)\, A_{n+1}(\alpha) + \frac{(\Delta\alpha)^2}{2!} A_{n+2}(\alpha) - \ldots$$

$$F_n(\alpha + \Delta\alpha) = F_n(\alpha) - (\Delta\alpha)\, F_{n+1}(\alpha) + \frac{(\Delta\alpha)^2}{2!} F_{n+2}(\alpha) - \ldots$$

These can also be used as means of accurate interpolation between the tabulated values of α; specially for $\alpha > 0.5$ this interpolation is rapidly convergent.

REFERENCES

(1) Rosen, N., *Phys. Rev.* **38**, 2099 (1931).
(2) Kotani, R., Amemiya, A., and Simose, T., *Proc. Phys-Math. Soc. Japan*, **20**, extra number, 1938, **22**, extra number, 1940.
(3) James, H., and Coolidge, A., *J. Chem. Phys.* **1**, 825 (1933).

Aneesur Rahman, Physical Laboratories, Osmania University, Hyderabad, 7, India.

TABLE DES MATIERES

DU TOME 69me

PAGES

Manuscrits reçus le 31 janvier 1955

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques**

L'effet Wien dans les solutions sodium-ammoniac, par MM. Gérard LEPOUTRE, Norbert SÉGARD et Andrew PATTERSON 5

La température critique des composés organiques, par M. Fr. VAN HECKE 11

Session du jeudi 28 avril 1955, à Bruxelles 23

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques**

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques**

Un oculaire triplet pour microscope, par M. A. BIOT 24

Mesure précise des masses des isotopes radioactifs par spectrographie de masse, par M. J. M. DELFOSSE 27

Correction de réflexion aux mesures de diffusion moléculaire de la lumière, par MM. P. PUTZEYS et J. MINET 29

Session du 27 octobre, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Le théorème de Picard du point de vue topologique, par Ch. de LA VALLÉE POUSSIN 37

A. S. Eddington E-numbers, by A. DEPRIT 50

A note on a theorem of F. C. Hsiang, by S. D. SINVHAL 79

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Modèle atmosphérique, par O. GODART 85

Réponse des scintillateurs inorganiques activés à l'énergie des radiations incidentes, par A. MEESSEN 102

Remarques concernant la purification des deutéroéthanes, par R. VAN RIET. 117

Tables of integrals $A_n(\alpha) = \int_1^\infty \lambda^n e^{-\alpha\lambda} d\lambda$ and $F_n(\alpha) = \int_1^\infty \lambda Q_0(\lambda)\lambda^n e^{-\alpha\lambda} d\lambda$, by A. RAHMAN 123

AUTEURS

A. Biot, 24 — J. M. Delfosse, 27 — A. Deprit, 50 — O. Godart, 85 — Ch. de La Vallée Poussin, 37 — G. Lepoutre, 5 — A. Meessen, 102 — J. Minet, 29 — A. Patterson, 5 — P. Putzeys, 29 — A. Rahman, 123 — N. Ségard, 5 — S. D. Sinvhal, 79 — F. Van Hecke, 11 — R. Van Riet, 117.

DATES DE PUBLICATION

1re fasc., pp. 1 à 36 ..... 8 juin 1955

2e fasc., pp. 37 à 129 ..... 22 décembre 1955

(25.054) Imprimerie Ceuterick, s. c., 66, rue Vital Decoster, Louvain. Resp. L. Pitsi, 25, rue Dagobert Louvain (Belgique)

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 300 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique)

PRIX D'ABONNEMENT

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs belges
abonnement d'honneur	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120 boulevard St Germain, Paris 6e)	1400 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQU

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLE

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLE

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 —(1929 à 1933) fr. 40,
(1931 à 1936) fr. 20,
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,
(1931 à 1936) fr. 100,
Série I (sc. mathématiques et physiques),tt.LVII àLXVII(1937 à 1953) fr. 70,
t. LXVIII (1954) et T. LXIX (1955) fr. 100,
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . fr. 200,
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 60,
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels. . fr. 200,
Le fascicule . . . . . fr. 40,
t. CXVII(1940 et 1946),tt. CXVIII à CXXVI(1947 à 1955)Le volume fr. 200,
Le fascicule . . . . . fr. 60,

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 20,
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. 40,

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 20,
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 20,
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 30,

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative mine rale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00 autres pays, 30,00 fr.

II. — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents Un vol. in-8° de 9 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr. 30,00.

IV. — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique Un vol. in 8°- de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Be gique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90,00

III. — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8 de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autre pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularité en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . fr. 20,

II. — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vo de 50 pages . . . . . fr. 10,

III. — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de trava en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. 60,